陰公式の整合性

式 (6.26) に微分解 u を代代入し、左辺と右辺の差を見積もる:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\Delta t}\{u(x_j, t_n + \Delta t) - u(x_j, t_n)\} \\
&\quad - \frac{1}{(\Delta x)^2}\{u(x_j + \Delta x, t_n + \Delta t) - 2u(x_j, t_n + \Delta t) + u(x_j - \Delta x, t_n + \Delta t)\} \\
&= O((\Delta t)) + O((\Delta x)^2), \quad \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \neq 1/6 \qquad (6.29)
\end{aligned}
$$

陰公式の整合性

式 (6.29) の特徴:

- 元の微分方程式 (6.9) と矛盾していない
- 差分方程式が微分方程式を近似する度合いも、$\Delta t \,/\, (\Delta x)^2 \neq 1/6$ ならば陽公式と同程度

陰解法の安定性の条件

式 (6.27) の特殊解は

$$U_j^n = \left(1 + 4\alpha \sin^2 \frac{k\Delta x}{2}\right)^{-n} \exp(ikj\Delta x) \qquad (6.30)$$

$$1 + 4\alpha \sin^2 \frac{k\Delta x}{2} \geq 1 \qquad (6.31)$$

より、 $\left(1 + 4\alpha \sin^2 \frac{k\Delta x}{2}\right)^{-n}$

は常に1以下

陰解法の安定性の条件

- α の値がどのような値であろうとも、任意の k に対する特殊解の絶対値は n を大きくしても増大しない
- ☞ **無条件安定** (unconditionally stable)
- どのような $\Delta t,\ \Delta x$ の値に対しても 計算が安定に進む

陰公式の計算例 (図 6-10)

- $\Delta x = 1/50$, $\Delta t = 1/100$ とした場合の計算例
- 陽公式では、$\Delta x = 1/50$ に対し、$\Delta t = 1/5000$ 程度にしなければならない（時間方向の格子点数が陰公式の50倍必要）
- 陰公式の1ステップ（時刻）あたりの計算の手間は陽公式の数倍程度⇒陰公式の方が効率がよい

拡散方程式の性質と安定性の条件

- 拡散方程式は、ある時刻での空間内の任意の1点の情報が、次の時刻には全領域に伝わるという性質を持つ
- 陽公式では、U_j^n の情報は次の時刻では U_{j-1}^{n+1}, U_j^{n+1}, U_{j+1}^{n+1} にしか伝わらない

拡散方程式の性質と安定性の条件

- 陰公式では、連立1次方程式を通して、U_j^n の情報が次の時刻に U_j^{n+1} $(j = 1, 2, \ldots, N-1)$ すべてに影響をもたらす☞ある点の情報が次の時刻で空間の隅々まで拡散する

- 以上より、陰公式の方がもとの微分方程式の性質を自然に反映していると言える

6-4 波動方程式

波動方程式の差分法

波動方程式 (6.5) の初期条件を一般化

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (0 < x < 1,\ t > 0) \qquad (6.32a)$$

$$u(x, 0) = \phi(x) \quad (0 \leqq x \leqq 1), \qquad \phi(0) = \phi(1) = 0,$$

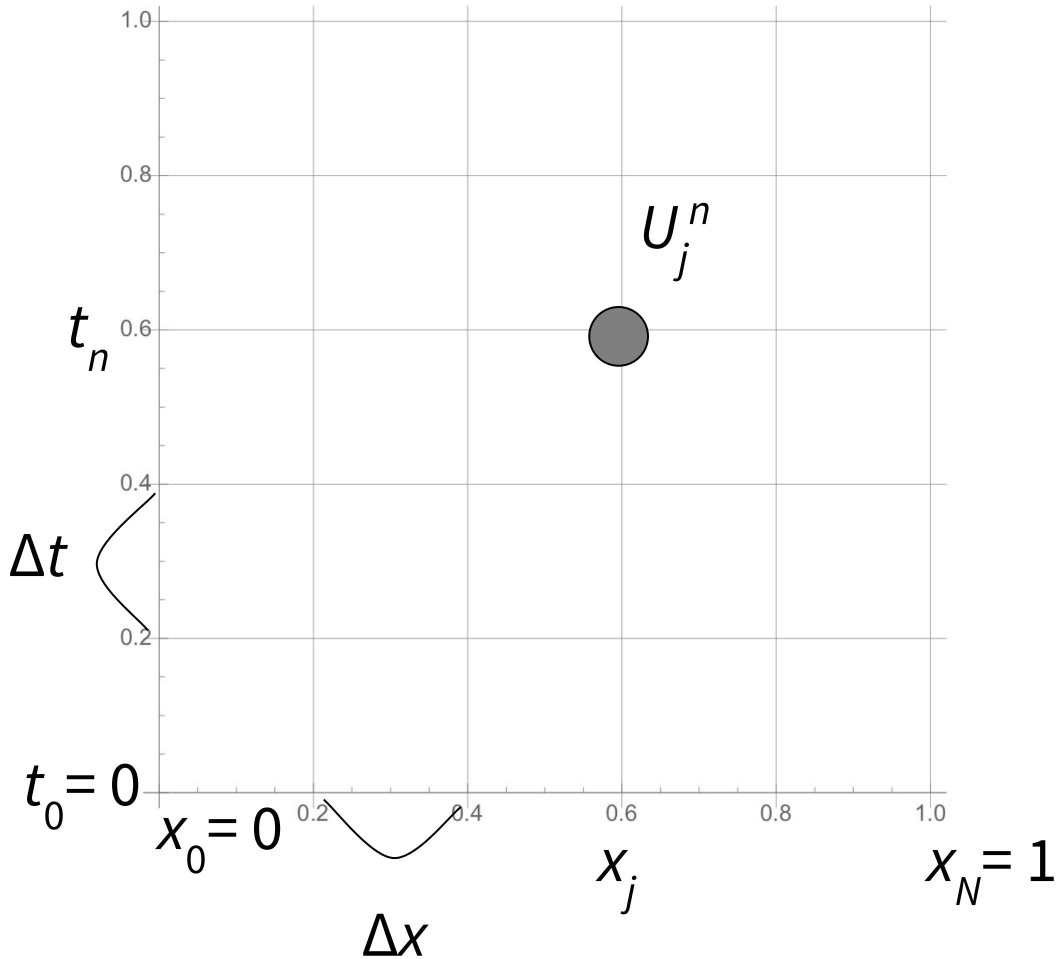
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x) \qquad (0 \leqq x \leqq 1) \qquad (6.32b)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \qquad (t \geqq 0) \quad \text{(境界条件)} \qquad (6.5d)$$

独立変数に関する格子点の定義

- 空間: x, 時間: t
- $\Delta x, \Delta t$: それぞれ x, t に関する格子点の間隔
- N: x 方向の格子点の個数 ($N \Delta x = 1$)
- $x_j = j \Delta x,\ t_n = n \Delta t$
- U_j^n: 微分解 $u(x_j, t_n)$ に対応する差分解

独立変数に関する格子点の定義



差分方程式による微分方程式の近似

微分方程式 (6.32a) を近似した差分方程式:

$$\frac{1}{(\Delta t)^2}(U_j^{n+1} - 2U_j^n + U_j^{n-1}) = \frac{1}{(\Delta x)^2}(U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n)$$

$(j = 1, 2, \dots, N-1,\ n = 0, 1, \dots)$ (6.33)

この式を書き換えると（陽公式）

$U_j^{n+1} = 2U_j^n - U_{j+1}^{n-1} + \alpha (U_{j+1}^n - 2U_j^n) + \alpha U_{j-1}^n$, $\alpha = \Delta t/(\Delta x)^2$ (6.13)

差分方程式による微分方程式の近似

この式を書き換えると（陽公式）

$$U_j^{n+1} = 2\,U_j^n - U_{j+1}{}^{n-1} + \alpha\,(U_{j+1}{}^n - 2\,U_j^n + U_{j-1}{}^n), \qquad (6.34)$$

$$\alpha = \Delta t/(\Delta x)^2$$

- 時刻 t_{n-1}, t_n での U から次の時刻 t_{n+1} での U を計算する漸化式
- 初期条件 U_j^0, U_j^1 を決める

初期条件の導出

U_j^0: 式 (6.32b) 左より

$$U_j^0 = \phi(x_j) \quad (j = 0, 1, \ldots N) \tag{6.35}$$

U_j^1 を決めるために Taylor の公式を用いる:

$$\begin{aligned} u(x, \Delta t) = u(x, 0) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) \\ + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, 0) + O((\Delta t)^3) \end{aligned} \tag{6.36}$$

初期条件の導出

式 (6.32b) 右より $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\psi(x)$

さらに $t=0$ でも式 (6.32a) が成り立つとすると

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,0)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,0) \tag{6.37}$$

式 (6.37) の右辺を2階差分商で近似すると

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,0)\simeq\frac{1}{(\Delta x)2}\{u(x+\Delta x,0)-2u(x,0)+u(x+\Delta x,0)\} \tag{6.38}$$

初期条件の導出

よって、式 (6.36) の差分方程式による近似は

$$U_j^1 = U_j^0 + \Delta t\,\psi(x_j) + \frac{\alpha}{2}(U_{j+1}^0 - 2U_j^0 + U_{j-1}^0)$$

$(j = 1, 2, \ldots N - 1)$ (6.39)

境界条件は式 (6.32c) より

$$U_0^n = U_1^n = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{6.40}$$

波動方程式のアルゴリズム

- 解を求める時刻の最大値: T
- 解を求める時間の分割数: M
- $\Delta t \leftarrow T/M$

波動方程式のアルゴリズム

入力: $\phi(x)$, $\psi(x)$ $(0 \leqq x \leqq 1)$: 初期条件,

T: 解を求める時刻, M: 解を求める時間の分割数,

N: 空間 x の区間 $[0, 1]$ の分割数

出力: U_j^T $(j = 0, 2, \ldots, N)$: $t = T$ における微分方程式の解 $u(x, t)$ の近似値（差分方程式 (6.33) の解）

波動方程式のアルゴリズム (1)

1. $\Delta x \leftarrow 1/N$;　$\Delta t \leftarrow T/M$;　$\alpha \leftarrow (\Delta t/\Delta x)^2$;
2. for ($j \in [0 \,..\, N]$)
   a. $U_j^0 \leftarrow \phi(j\,\Delta x)$;　// 初期条件の設定
3. for ($j \in [1 \,..\, N-1]$)　// $t = 1$ における近似解
   a. $U_j^1 \leftarrow U_j^0 + \Delta t\, \psi(j\Delta x) + \frac{\alpha}{2}(U_{j+1}^0 - 2U_j^0 + U_{j-1}^0)$;
   b. $U_0^1 \leftarrow 0$;　$U_N^1 \leftarrow 0$;

波動方程式のアルゴリズム (1)

4. for ($n \in [1 .. M-1]$) // $t = n+1$ における近似解
   a. for ($j \in [1 .. N-1]$)
      i. $U_j^{n+1} \leftarrow 2U_j^n - U_j^{n-1} + \alpha(U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n);$
   b. $U_0^{n+1} \leftarrow 0;$ $U_N^{n+1} \leftarrow 0;$
5. return $\{U_0^M, U_1^M, \dots, U_N^M\};$

波動方程式のアルゴリズム (1) の改良

- 拡散方程式の場合と同様、$n = 0, 1, \ldots, M-1$ に対し、$U_j^{n-1}, U_j^n, U_j^{n+1}$を使い回すことでメモリの使用量を節約する
- 次のアルゴリズムの中で、以下の置き換えを行う:

$$\mathrm{old\_}U_j = U_j^{n-1}, \quad \mathrm{cur\_}U_j = U_j^n, \quad \mathrm{new\_}U_j = U_j^{n+1}$$

波動方程式のアルゴリズム (2)

1. $\Delta x \leftarrow 1/N$; $\Delta t \leftarrow T/M$; $\alpha \leftarrow (\Delta t/\Delta x)^2$;
2. for ($j \in$ [0 .. N])
   a. old_$U_j \leftarrow \phi(j\,\Delta x)$;   // 初期条件の設定
3. for ($j \in$ [1 .. $N - 1$]) // $t = 1$ における近似解
   a. cur_$U_j \leftarrow$ old_$U_j + \Delta t\,\psi(j\,\Delta x)$
      $+ (\alpha/2)$ (old_U_{j+1} – 2 old_U_j + old_$U_{j\text{-}1}$)
   b. cur_$U_0 \leftarrow 0$; cur_$U_N \leftarrow 0$; new_$U_0 \leftarrow 0$; new_$U_N \leftarrow 0$;

波動方程式のアルゴリズム (2)

4. for ($n \in [1 .. M - 1]$) // $t = n+1$ における近似解
   a. for ($j \in [1 .. N - 1]$)
      i. new_$U_j \leftarrow 2$ cur_$U_j -$ old_U_j
         $+ \alpha$ (cur_$U_{j+1} - 2$ cur_$U_j +$ cur_U_{j-1})
   b. for ($j \in [0 .. N]$)
      i. old_$U_j \leftarrow$ cur_U_j;   cur_$U_j \leftarrow$ new_U_j;
5. return {new_U_0, new_U_1, … , new_U_N};

安定性の条件

安定性の条件を調べる

差分方程式 (6.34) の特殊解は

$$U_j^n = s^n \exp(i\,k\,j\,\Delta x) \tag{6.41}$$

ここで s は方程式

$$s^2 - 2(1 - 2\,\alpha\,(\sin\,(k\,j\,\Delta x/2)^2)\,s + 1 = 0 \tag{6.42}$$

の根

安定性の条件

$\beta = \alpha (\sin (k j \Delta x/2))^2$ とおくと

$$s = s_1 = 1 - 2\beta + \{4\beta(\beta - 1)\}^{1/2}, \tag{6.43a}$$

$$s = s_2 = 1 - 2\beta - \{4\beta(\beta - 1)\}^{1/2} \tag{6.43b}$$

計算が発散しないためには、任意の k に対して $|s_1| \leqq 1$ かつ $|s_2| \leqq 1$ でなければならない

安定性の条件

βの値で場合分け

- $\beta > 1$: s_1, s_2 ともに実数、$s_1 \neq s_2$, $s_1 s_2 = 1$より$|s_1|$ か $|s_2|$ のどちらかが必ず1より大きい
- $\beta = 1$: $s_1 = s_2$ となり、$|s_1| = |s_2| = 1$
- $\beta < 1$: s_1, s_2 ともに複素数、$|s_1| = |s_2| = 1$

安定性の条件

以上をまとめると、$\beta \leqq 1$、すなわち

$$\alpha\,(\sin\,(k\,j\,\Delta x/2))^2 \leqq 1 \tag{6.44}$$

さらに、任意の k に対してこの条件が成り立つため

には、$\alpha \leqq 1$、すなわち

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \tag{6.45}$$

が成り立たなければならない（安定性の条件）

波動方程式の計算例

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (0 < x < 1,\ t > 0) \qquad (6.5a)$$

$$u(x, 0) = 2x(1 - x) \quad (0 \leqq x \leqq 1) \qquad \text{(初期条件)} \quad (6.5b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \qquad (0 \leqq x \leqq 1) \qquad \text{(初期条件)} \quad (6.5c)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \ (t \geqq 0) \qquad \text{(境界条件)} \quad (6.5d)$$

波動方程式の計算例（教科書 p. 134）

- $N = 20$ ($\Delta x = 1/20$), $\Delta t = 1/50$ (図 6-11 (a)):
  - 差分解は安定性の条件を満たし、計算値も妥当な振る舞いをしている
- $N = 20$ ($\Delta x = 1/20$), $\Delta t = 1/10$ (図 6-11 (b)):
  - 時間が進むと結果が不安定になり、$n = 3$ で解が大きくずれ始め、その後数ステップ後の時刻で解が発散する
- 解が安定するためのΔx と Δt の関係は？

波動方程式の性質と安定性の条件

ここでは、空間領域 (x) が実数全体 **R** の場合の問題を考える:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (x \in \mathbf{R},\ t > 0) \qquad (6.46a)$$

$$u(x, 0) = \phi(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x) \qquad (x \in \mathbf{R}) \qquad (6.46b)$$

波動方程式の性質と安定性の条件

微分方程式 (6.46) の解

（ダランベール (d'Alembert) の解）

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\{\phi(x-t) + \phi(x+t)\} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \psi(s)ds \tag{6.47}$$

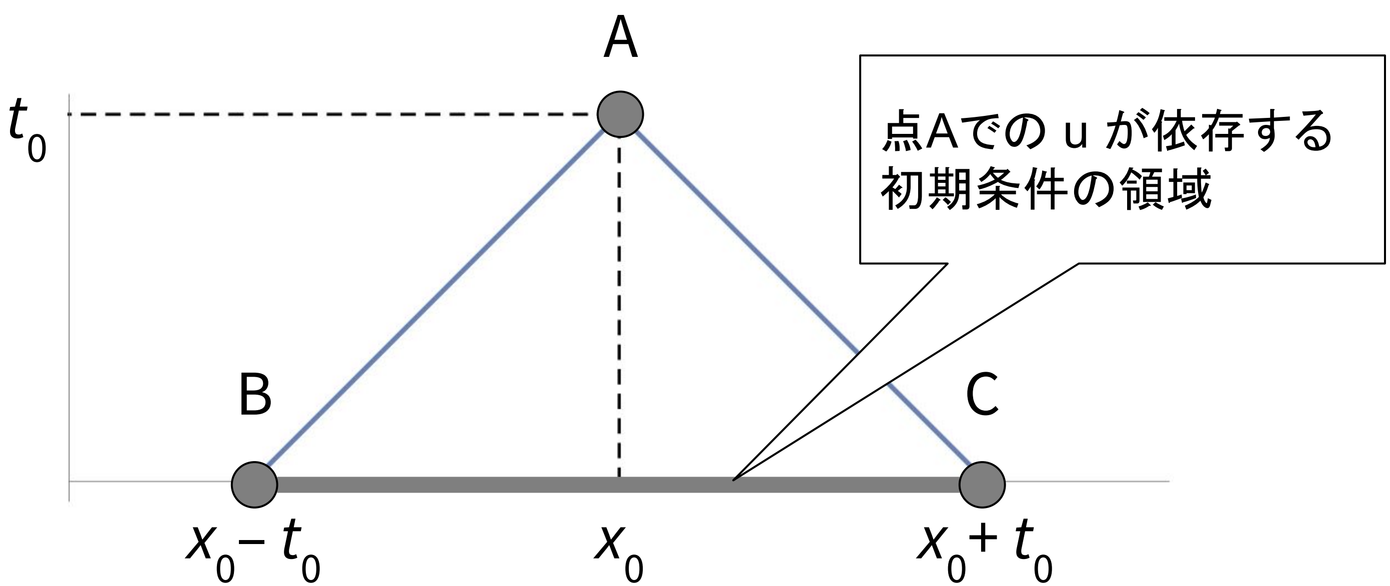
波動方程式の性質と安定性の条件

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\{\phi(x-t) + \phi(x+t)\} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \psi(s)ds \tag{6.47}$$

- ある時刻および位置 (x_0, t_0) での解 u の値は $\phi(x_0-t_0)$, $\phi(x_0+t_0)$および $x_0-t_0 \leqq s \leqq x_0+t_0$ の範囲の $\psi(s)$ の値に依存する
- $\phi(x)$ および $\psi(x)$ は $t=0$ での初期条件で与えられる

波動方程式の性質と安定性の条件

ある時刻および位置 (x_0, t_0) での微分解 u の値は、図の直角2等辺三角形ABCの底辺BCで表される領域の$\phi(x)$ および $\psi(x)$の値に依存する



波動方程式の性質と安定性の条件

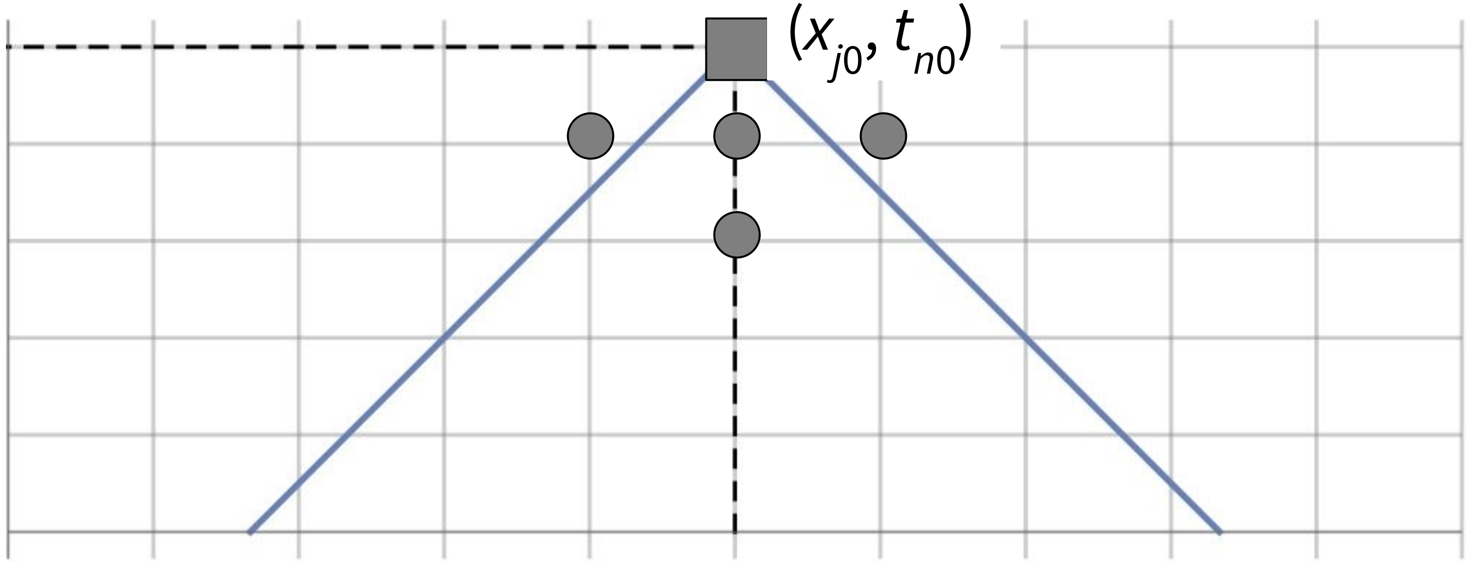
ある時刻および位置 (x_{j0}, t_{j0}) での差分解 U_{j0}^{t0} の値は、どのように初期条件に依存するか？を確かめる

- 式 (6.40) の境界条件は考慮しない
- 空間方向 (x) の格子点の範囲を $-\infty < j < \infty$ に拡大する
- 初期条件 (6.35), (6.39) の下で差分方程式 (6.34) を解き、U_j^n を n の小さい方から順に求める

$$U_j^{n+1} = 2\,U_j^n - U_{j+1}^{n-1} + \alpha\,(U_{j+1}^n - 2\,U_j^n + U_{j-1}^n) \qquad (6.34)$$

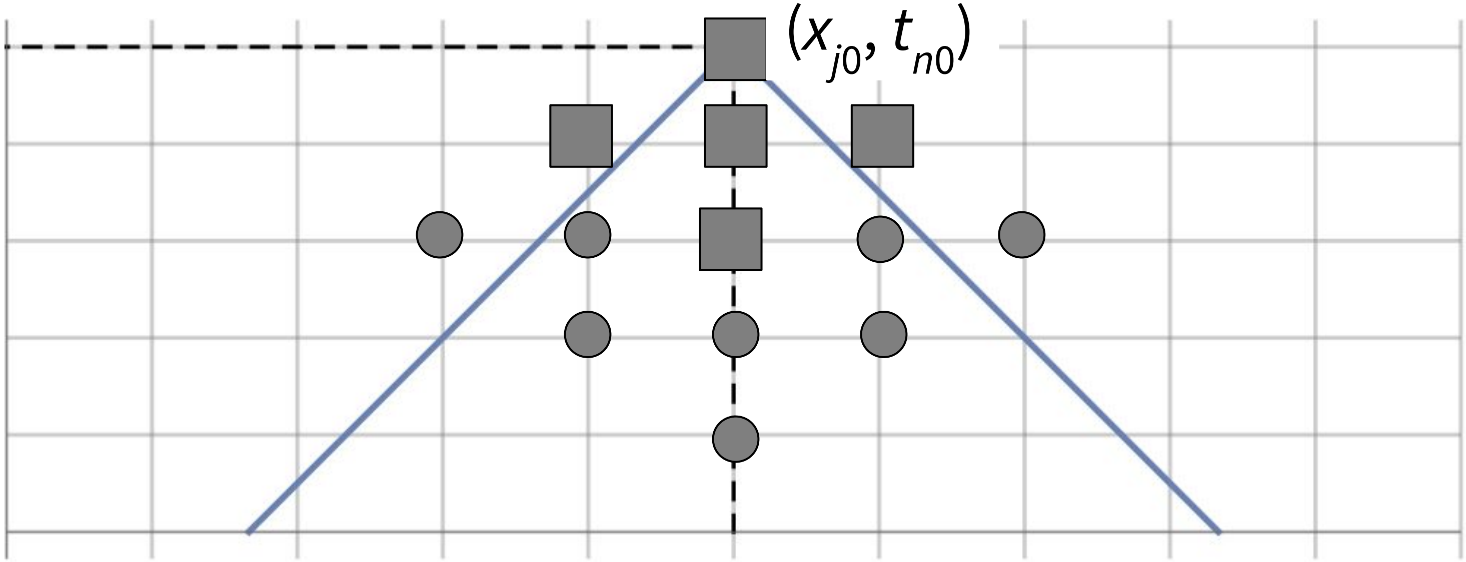
波動方程式の性質と安定性の条件

格子点 (x_{j0}, t_{n0}) における差分解 U_{j0}^{n0} は、式 (6.34) より U_{j0-1}^{n0-1}, U_{j0}^{n0-1}, U_{j0+1}^{n0-1}, U_{j0}^{n0-2} の4点によって決まる



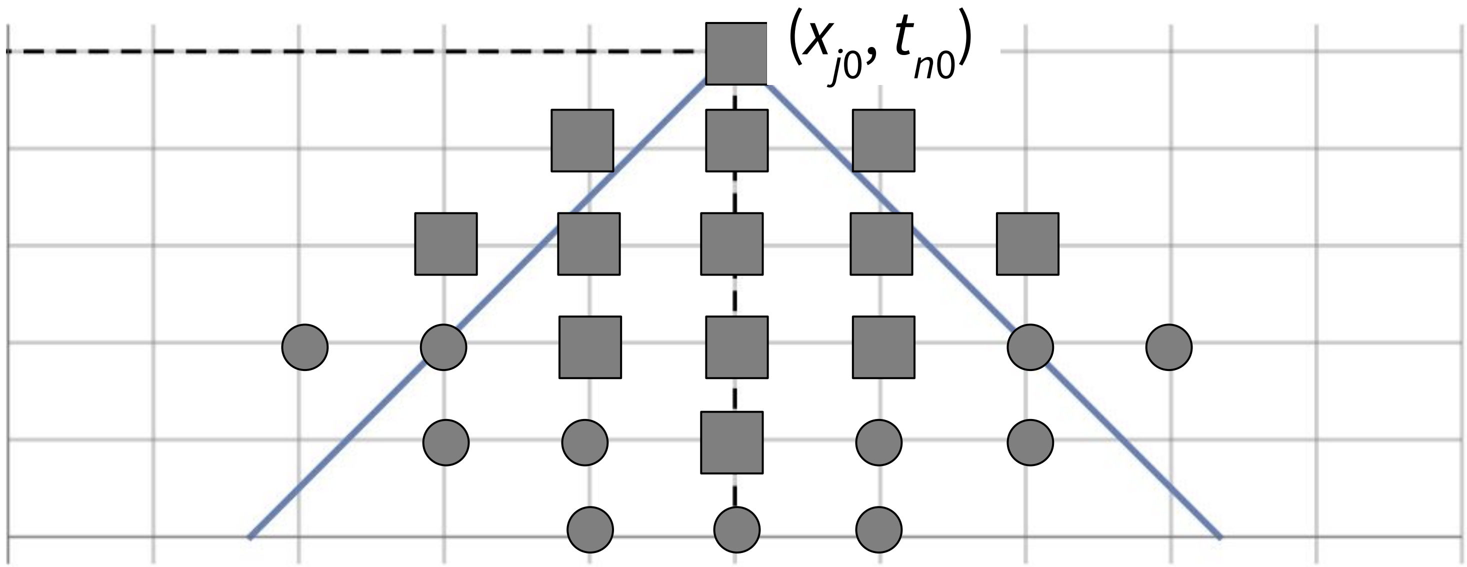
波動方程式の性質と安定性の条件

$U_{j0-1}^{n0-1}, U_{j0}^{n0-1}, U_{j0+1}^{n0-1}, U_{j0}^{n0-2}$ の4点は、さらに前の時刻の格子点におけるUの値によって決まる



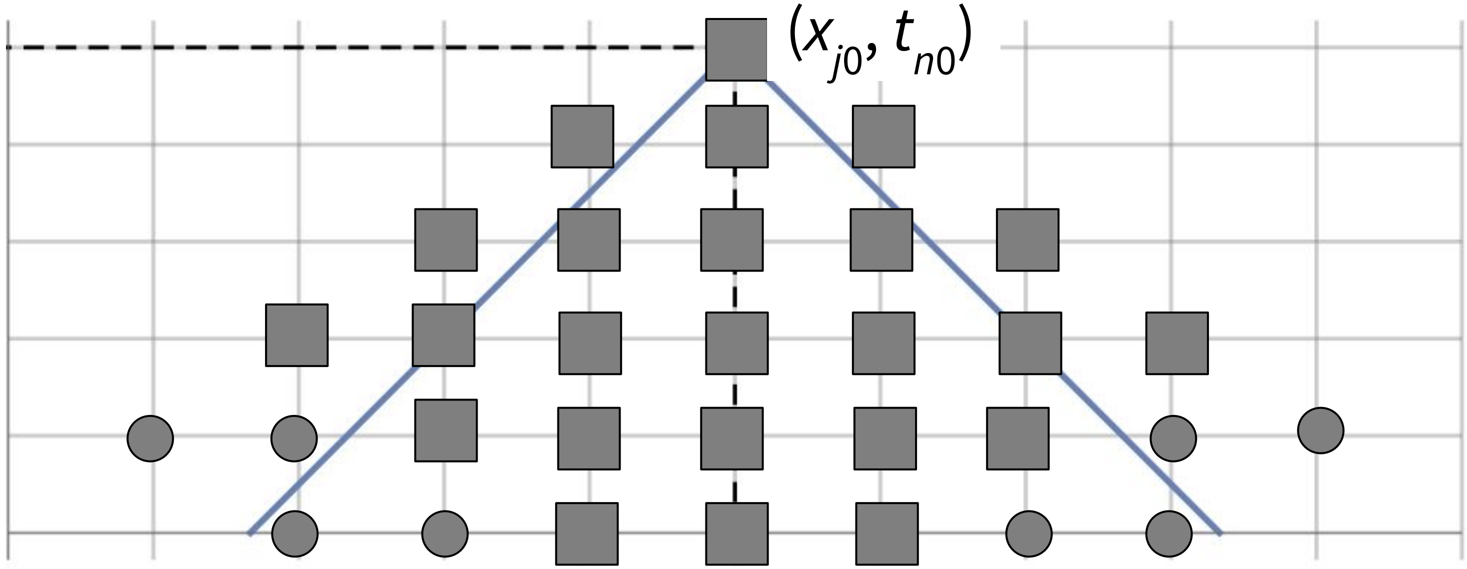
波動方程式の性質と安定性の条件

さらに前の時刻の格子点を遡っていくと…



波動方程式の性質と安定性の条件

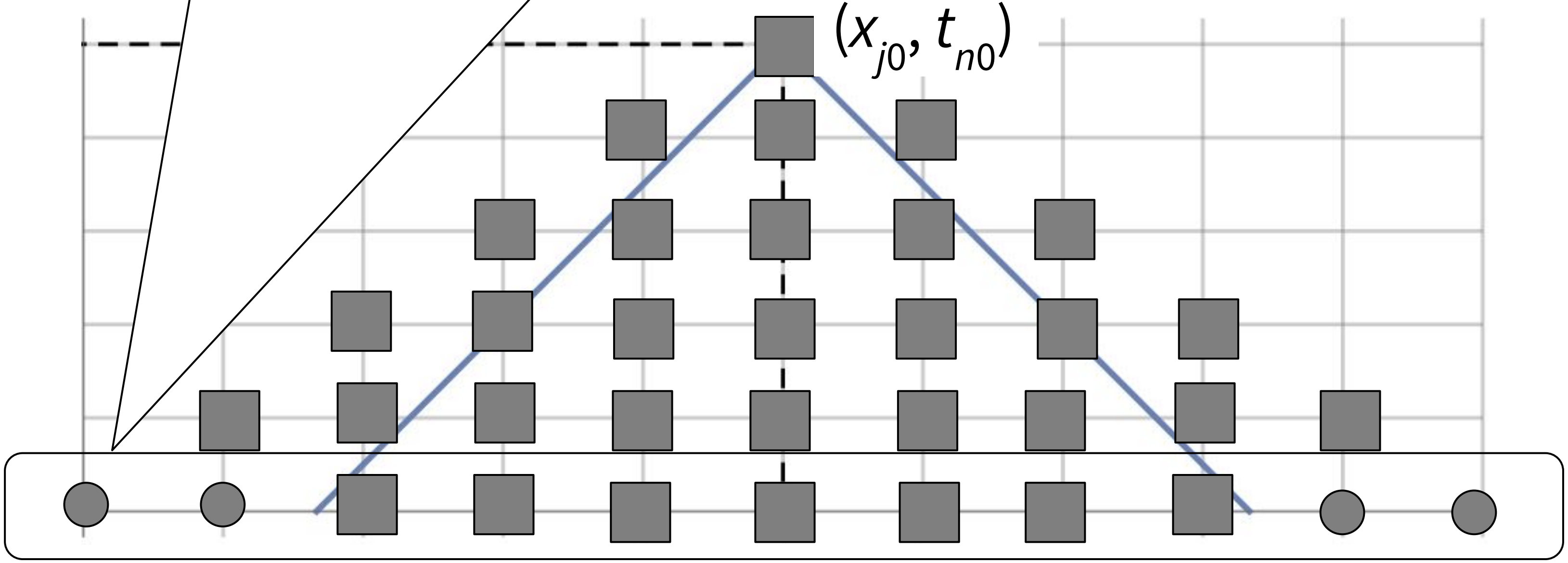
さらに前の時刻の格子点を遡っていくと…



波動方程式の性質と安定性の条件

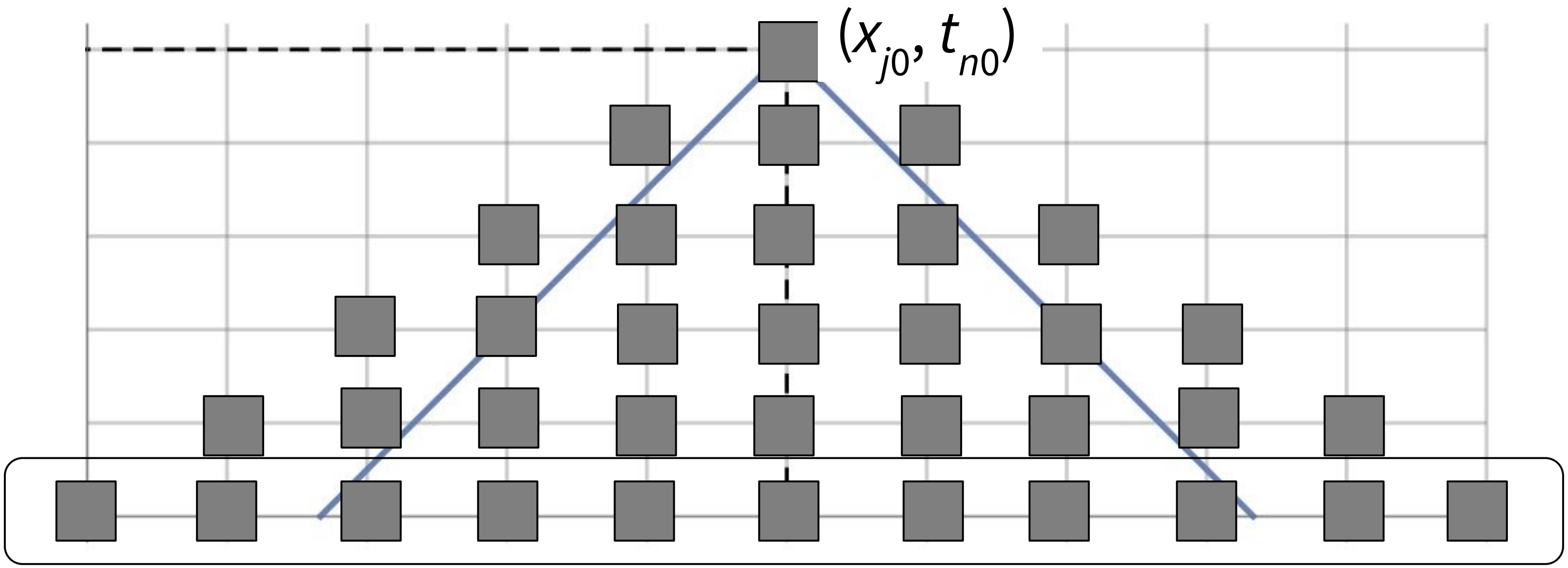
さらに前の時刻の格子点を遡っていくと…

最終的に $t = 0$ で枠の範囲におけるUの値に依存する



波動方程式の性質と安定性の条件

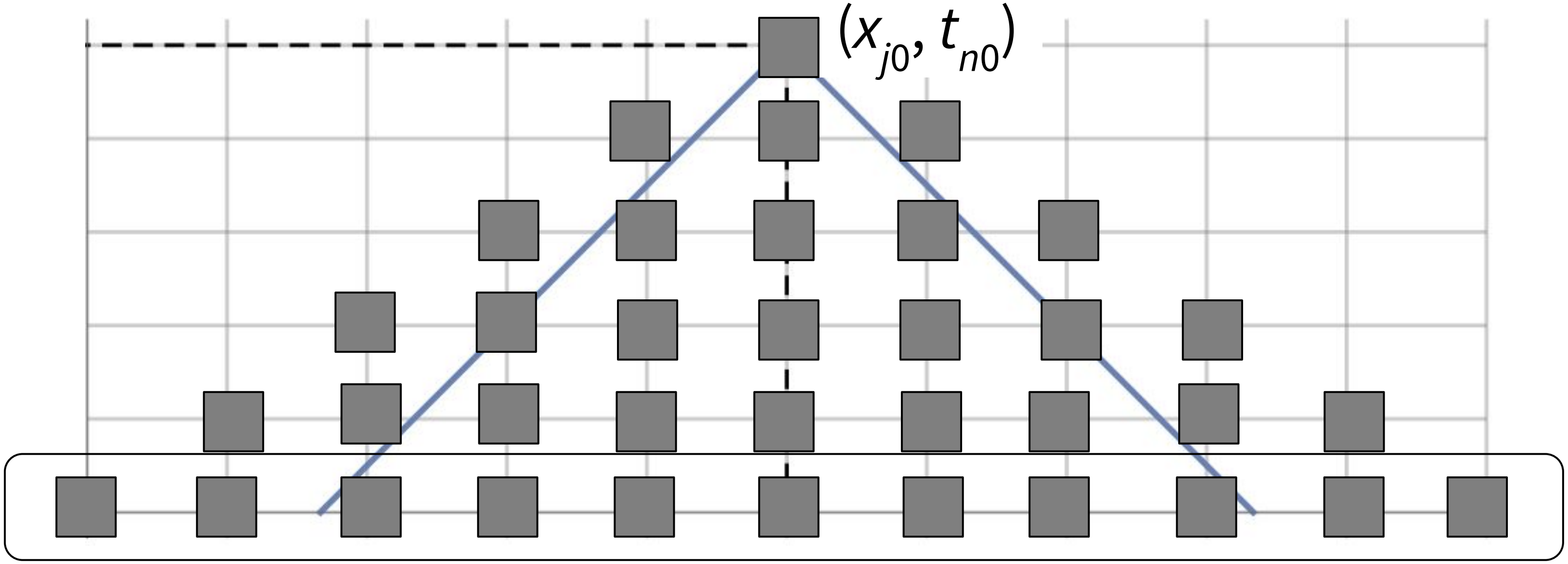
U_{j0}^{n0} は $j_0-n_0 \leqq j \leqq j_0+n_0$ の範囲の $\phi(x_j)$ と $j_0-n_0+1 \leqq j \leqq j_0+n_0-1$ の範囲の $\psi(x_j)$ から決定される



波動方程式の性質と安定性の条件

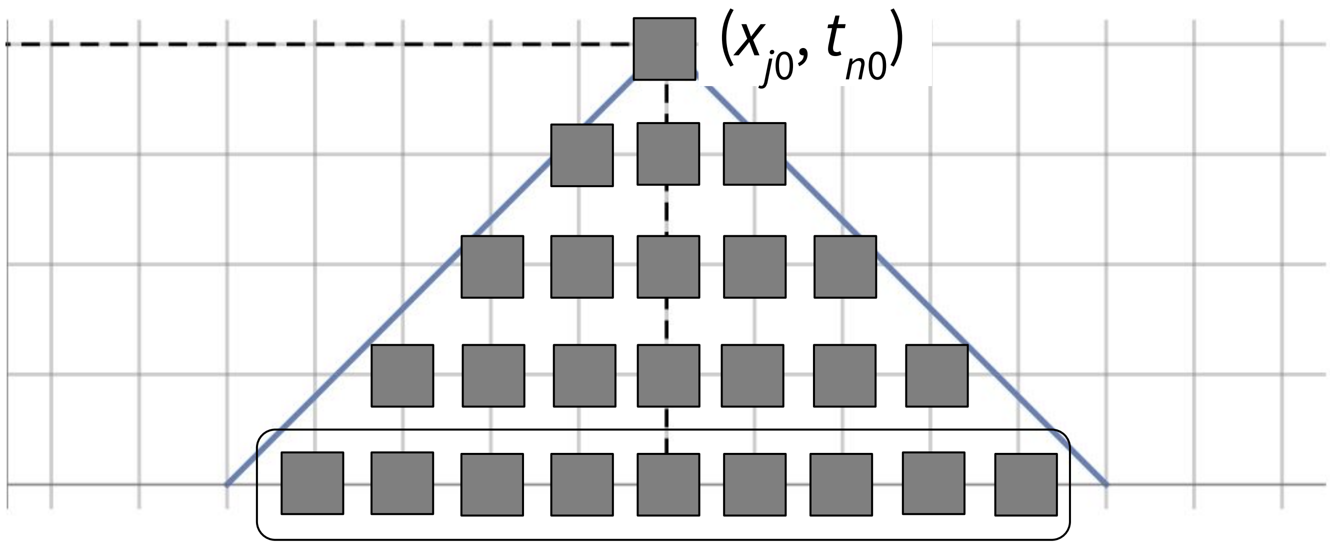
図 6-13(b): $\Delta t/\Delta x \leqq 1$ の場合: 微分解の依存領域（三角形の底辺の部分）を差分解がカバーしている

⇒差分解が微分解の性質を反映する



波動方程式の性質と安定性の条件

図 6-13(a): $\Delta t/\Delta x > 1$ の場合: 微分解の依存領域（三角形の底辺の部分）を差分解がカバーできていない⇒差分解に微分解を反映させるための情報が十分でない



6-5 ラプラス方程式

ラプラス方程式の差分法

ラプラス方程式 (6.7) の境界値問題を考える

ただし、境界条件を一般化する

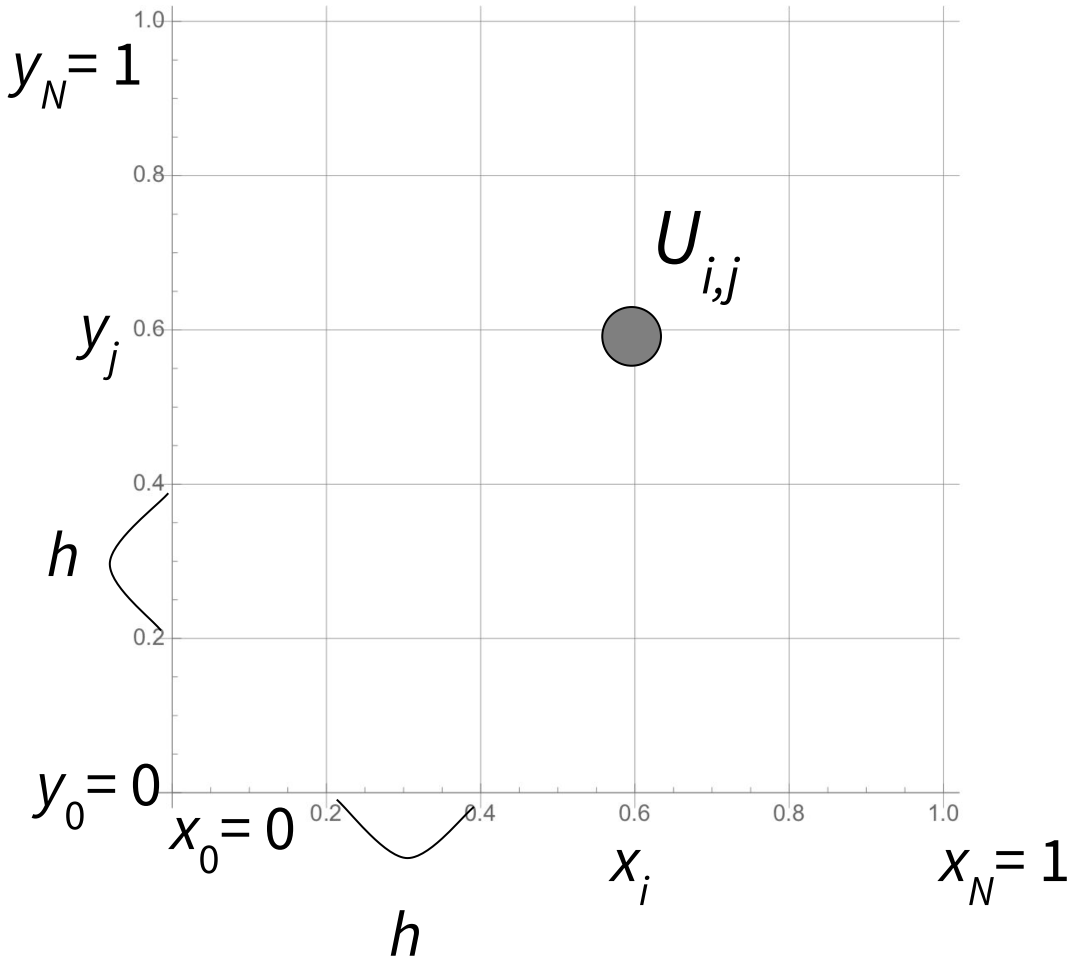
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (0 < x < 1,\ 0 < y < 1) \qquad (6.48a)$$

$$u(x, 0) = \phi_1(x),\ u(x, 1) = \phi_2(x) \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

$$u(0, y) = \psi_1(y),\ u(1, y) = \psi_2(y) \quad (0 \leqq y \leqq 1) \qquad (6.48b)$$

$$\phi_1(0) = \psi_1(0),\ \phi_1(1) = \psi_1(0),\ \phi_1(0) = \psi_1(1),\ \phi_1(1) = \psi_1(1)$$

格子点の定義



格子点の定義

- $N h = 1$
- x 方向と y 方向の格子点の個数は等しくなくても構わない（今回は両者が等しい設定）
- $x_i = i h, y_j = j h$
- U_{ij}: 微分解 $u(x_i, y_j)$ に対応する差分解

差分方程式の導出

微分方程式 (6.48a) に対応する差分方程式:

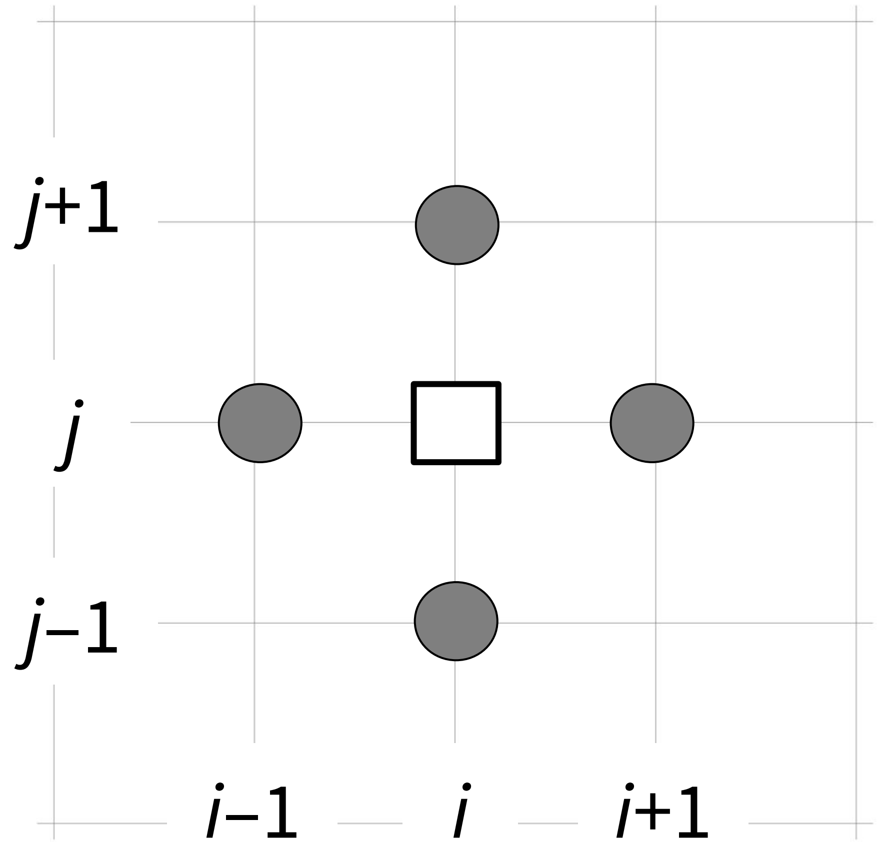
$$\frac{1}{h^2}(U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}) + \frac{1}{h^2}(U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}) = 0 \tag{6.49}$$

それを整理した式:

$$4U_{i,j} - (U_{i+1,j} + U_{i-1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1}) = 0 \tag{6.50}$$

差分方程式と最大値の原理

- 式 (6.50) の解釈:
「□でのUの値はその周囲での4つの●でのUの値の平均値に等しい」
- □、●の合計5点でのUの値のうち、最大値および最小値を取るのは必ず周囲の●のどれかの点に存在する



差分方程式と最大値の原理

ラプラス方程式 (6.48a) の微分解 u は以下の「最大値の原理」(maximum principle) を満たす:

- Ω: R^n の有界領域
- Γ: Ωの境界
- u が Ω の閉包 (Ω ∪ Γ) においてラプラス方程式の解ならば、u は境界 Γ において最大値（最小値）をとる

⇒ 差分方程式が微分方程式の性質をうまく反映している

連立1次方程式の導出

境界条件 (6.48b) から導出される条件:

$$
\begin{aligned}
&U_{i,0} = \phi_1(x_i), U_{i,N} = \phi_2(x_i) \ \ (i = 0, 1, \ldots N) \\
&U_{0,j} = \psi_1(y_j), U_{N,j} = \psi_2(y_j) \ \ (j = 0, 1, \ldots N)
\end{aligned}
\tag{6.51}
$$

差分方程式 (6.50) を各 i, j について並べると、U_{ij}に関する連立1次方程式を得る

連立1次方程式の導出

$N=4$ のときの例:

U_{ij} のうち、式 (6.51) により値が与えられているものを右辺に、未知のものを左辺にまとめた

$$
\begin{pmatrix}
4 & -1 & 0 & -1 & & & & & \\
-1 & 4 & -1 & 0 & -1 & & & & \\
0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & & & \\
-1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & & \\
 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & \\
 & & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\
 & & & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\
 & & & & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\
 & & & & & -1 & 0 & -1 & 4
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
U_{1,1} \\ U_{2,1} \\ U_{3,1} \\ U_{1,2} \\ U_{2,2} \\ U_{3,2} \\ U_{1,3} \\ U_{2,3} \\ U_{3,3}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
U_{0,1}+U_{1,0} \\ U_{2,0} \\ U_{4,1}+U_{3,0} \\ U_{0,2} \\ 0 \\ U_{4,2} \\ U_{0,3}+U_{1,4} \\ U_{2,4} \\ U_{4,3}+U_{3,4}
\end{pmatrix}
\tag{6.51}
$$

連立1次方程式の導出

行列の成分の規則性

$$
\begin{pmatrix}
4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & & & \\
-1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & & & \\
0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & & & \\
-1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\
& & & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\
& & & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\
& & & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
U_{1,1} \\ U_{2,1} \\ U_{3,1} \\ U_{1,2} \\ U_{2,2} \\ U_{3,2} \\ U_{1,3} \\ U_{2,3} \\ U_{3,3}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
U_{0,1} + U_{1,0} \\ U_{2,0} \\ U_{4,1} + U_{3,0} \\ U_{0,2} \\ 0 \\ U_{4,2} \\ U_{0,3} + U_{1,4} \\ U_{2,4} \\ U_{4,3} + U_{3,4}
\end{pmatrix}
$$

左辺の行列がブロックに分けられる

連立1次方程式の導出

行列の成分の規則性: 一般の N の場合

$$
\begin{pmatrix}
A & B & & & \\
B & A & B & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & B & A & B \\
 & & & B & A
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\boldsymbol{U}_1 \\ \boldsymbol{U}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{U}_{N-2} \\ \boldsymbol{U}_{N-1}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\boldsymbol{f}_1 \\ \boldsymbol{f}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{f}_{N-2} \\ \boldsymbol{f}_{N-1}
\end{pmatrix}
\tag{6.53}
$$

ブロック3重対角行列
(Block tridiagonal matrix)

連立1次方程式の導出

A, B: ともに (N – 1) x (N – 1) 小行列

$$
A = \begin{pmatrix}
4 & -1 & & & \\
-1 & 4 & -1 & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & -1 & 4 & 1 \\
 & & & -1 & 4
\end{pmatrix}
\qquad
B = \begin{pmatrix}
-1 & & & \\
 & -1 & & \\
 & & \ddots & \\
 & & & -1
\end{pmatrix}
\tag{6.54}
$$

連立1次方程式の導出

***U**$_j$*, ***f**$_j$* の定義:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{U}_j &= {}^t(U_{1,j}, U_{2,j}, \ldots, U_{N-2,j}, U_{N-1,j}), \quad (j = 1, 2, \ldots, N-1) \\
\boldsymbol{f}_1 &= {}^t(U_{0,1} + U_{1,0}, U_{2,0}, \ldots, U_{N-2,0}, U_{N,1} + U_{N-1,0}), \\
\boldsymbol{f}_j &= (U_{0,j}, 0, \ldots, 0, U_{N,j}) \quad (j = 2, 3, \ldots, N-2), \\
\boldsymbol{f}_{N-1} &= {}^t(U_{0,N-1} + U_{1,N}, U_{2,N}, \ldots, U_{N-2,N}, U_{N,N-1} + U_{N-1,N})
\end{aligned}
\tag{6.55}
$$

ブロック3重対角行列で表される連立1次方程式の効率的解法が存在する(教科書第7章演習問題)

ラプラス方程式の計算例

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (0 < x < 1,\ 0 < y < 1) \qquad (6.48a)$$

$u(x, 0) = \sin(\pi x),\ \ (0 \leqq x \leqq 1)$ (境界条件)

$u(x, 1) = 0 \qquad (0 \leqq x \leqq 1)$ (境界条件) (6.56)

$u(0, y) = u(1, y) = 0 \quad (0 \leqq y \leqq 1)$ (境界条件)

ラプラス方程式の計算例

N = 20 のときの差分解（教科書: 図 6-16）

- 図 6-6 の微分解の等高線と重ねてプロットすると等高線がほぼ一致

ラプラス方程式の計算例

N = 20 のときの差分解（教科書: 図 6-16）

- $N \to \infty$ ($h \to 0$) のとき、差分解は微分解に収束する
  - 差分方程式は最大値の原理を反映した性質を持っている
  - すべての U_{ij} の中で最大値および最小値をとるものは領域の境界上の格子点に存在する
  - 領域内部の U_{ij} の値は発散することがない

第6章のまとめ

- 代表的な偏微分方程式
  - 放物型（拡散方程式）
  - 双曲型（波動方程式）
  - 楕円型（ラプラス方程式）
- 各タイプの偏微分方程式の問題例
- 各タイプの偏微分方程式の差分法による解法

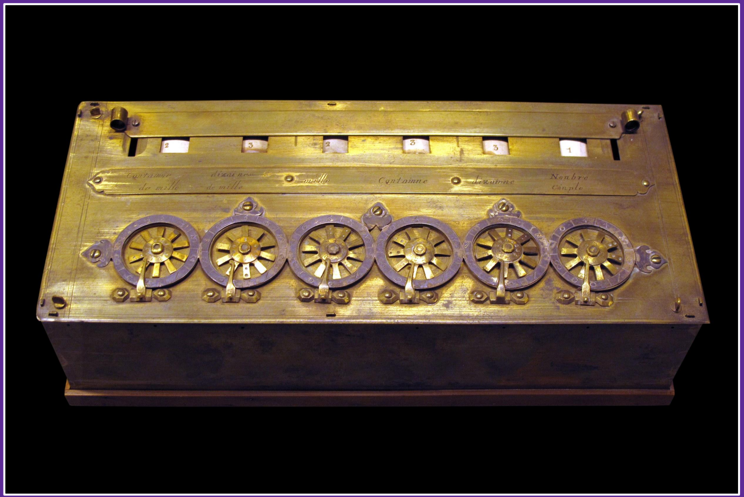
本授業のまとめ

- 数値計算
  - 浮動小数、誤差、アルゴリズム
  - 連立1次方程式の解法
  - 代数方程式の解法
  - 関数近似（関数補間、最小2乗法）
  - 数値積分
  - 常微分方程式の解法
  - 偏微分方程式の解法
- 基本的な内容をカバーしたつもり

この先の数値計算の道のり

- アルゴリズム
  - より高度／先進的な計算手法
  - 誤差解析
- 実装
  - より高度／先進的な実装
    - 並列処理
- 応用
  - 自分が解きたい／解かなければならない問題を解く

Happy Computing!



数学者パスカルが発明した計算器
（出典：Wikipedia）