

第8回 モデリング手法(1) 環境中移行と線量変化

羽田野祐子

システム情報系リスク工学専攻

アイソトープ環境動態研究センター環境動態予測部門

1. 定常ボックスモデル

ストック ()
 フロー ()
 滞留時間 ()

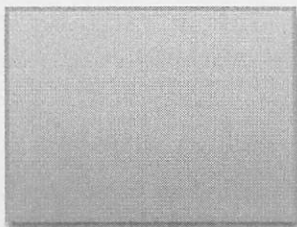
問題1 【単一ボックス】

ある汚染物質が 0.16 ton/日 の率で湖に廃棄されている。湖の体積は $4 \times 10^7 \text{ m}^3$ であり、水はこの湖を一日平均 $8 \times 10^4 \text{ m}^3$ 通過する。湖面からの蒸発は無視し、汚染物質は水中で一様に混合されるとすると、定常状態に達したときの湖の汚染物質濃度はいくらか。

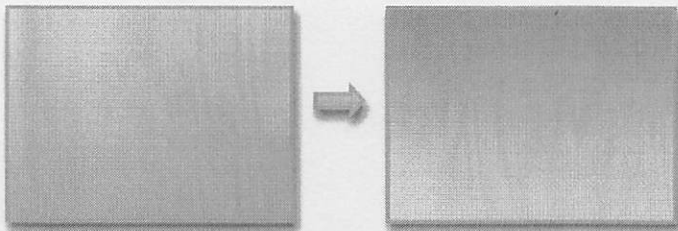
2. 非定常ボックスモデル

問題2 【非定常の単一ボックス】

次のようなボックスに半減期 1 分の放射性核種が 100 Bq 含まれている。この核種のボックス中の濃度は時間が経つにつれてどのように減っていくか。



問題3 【連結2ボックス】



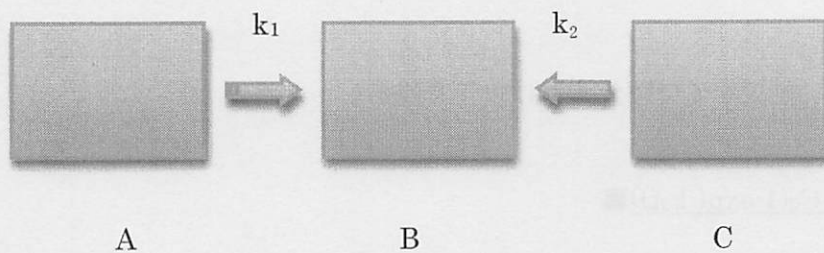
問題4 【連結3ボックス 放射平衡(過渡平衡と永続平衡)】

問題5 【 n 個の連結ボックスとポアソン過程】

練習問題

次のような3つのボックスからなるシステムがある。初期($t=0$)における物質の個数は、ボックス A において A_0 個、ボックス B で 0 個、ボックス C で C_0 個とする。

- (1) 真ん中のボックス B における物質の個数の時間変化 $B(t)$ を求めなさい。
- (2) 十分時間が経った時、ボックス B における個数はどうなるか。



練習問題 解答

(1)

まず連立方程式は以下のようになる。

$$\text{ボックス A について} \quad dA/dt = -k_1 A$$

$$\text{ボックス B} \quad dB/dt = +k_1 A + k_2 C \quad \dots(*)$$

$$\text{ボックス C} \quad dC/dt = -k_2 C$$

ボックス A, C については(最初の問題でやったように)次のように解が求まる。

$$A(t) = A_0 \exp(-k_1 t)$$

$$C(t) = C_0 \exp(-k_2 t)$$

これらを(*)式に代入し, 両辺を t で積分すれば以下を得る。

$$\underline{B(t) = A_0(1 - \exp(-k_1 t)) + C_0(1 - \exp(-k_2 t))} \blacksquare$$

(2)

$t \rightarrow \infty$ とすると $B(t) \rightarrow A_0 + C_0$ 、つまりこの系のすべての物質がボックス B に集まる。

福島事故由来の大気中核種濃度の指数関数による近似について

筑波大学大学院システム情報工学研究科 羽田野祐子・小西将貴

2015.05.20

1 はじめに

指数関数は、現実のデータの時間的な推移を検討する際に、最初に用いられる関数である。福島事故による大気中のセシウム濃度に関しても、そのような試みがされている(引用:五十嵐 EGU, 五十嵐エアロゾル学会)。事故後3年以内の実測値は、3つの指数関数の和によってよく表されている。ここでは、指数関数の和で表すことが、本質的にどのようなモデルに相当するかについて考える。

まず、次のようなボックスモデル(コンパートメントモデル)を考える。ボックスモデルは環境中の物質移動や生体への毒性などについて、広く用いられているモデルであり、指数関数と深く関わっている。

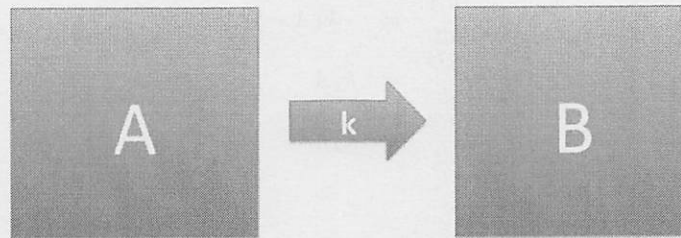


図1:2 ボックスモデル

最も単純な2ボックスモデルの場合について以下に説明する。左のボックスAは大気を意味し、その中に含まれる時刻 t におけるセシウムの総量を $A(t)$ で表す。ボックスBは地中を意味し、単位時間にボックスBへ移動する量は、その時刻のボックスA内の存在量に比例する。この比例定数を k_1 と置き、「移行係数」と呼ぶ。この場合 k_1 は「降雨によって空気中のセシウムが地面に浸透し、もはや二度と大気中濃度に貢献しない状態になる率」である。以上が、「降雨沈着によって大気から永遠に除去されるプロセス」のモデルである。実際に式にすると、以下のようになる。

$$\frac{dA}{dt} = -k_1 A \quad (1)$$

$$\frac{dB}{dt} = k_1 A \quad (2)$$

初期条件は、

$$A(0) = N, \quad B(0) = 0 \quad (3)$$

これらを解くと、

$$A(t) = Ne^{-k_1 t} \quad (4)$$

$$B(t) = -Ne^{-k_1 t} + N \quad (5)$$

このように、大気中のセシウムの総量 $A(t)$ は指数関数的に減衰することがわかる。

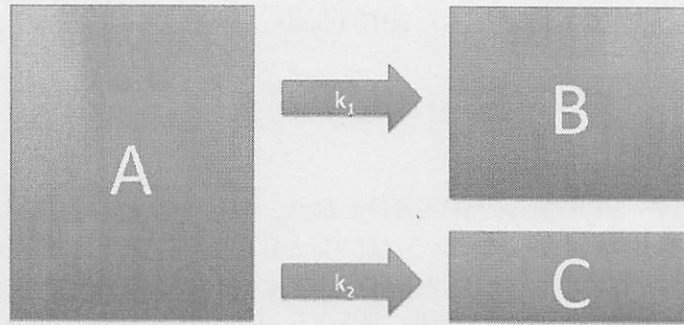


図 2

また仮に、降雨沈着以外のプロセスが加わった場合は図 2 のようになる。移行係数が、上記の k_1 の他に、もうひとつ増えた状態になる。たとえば植物の葉によるセシウムの摂取が考えられ、このプロセスの移行係数を k_2 とする。この場合、式は

$$\frac{dA}{dt} = -k_1 A - k_2 A \quad (6)$$

$$\frac{dB}{dt} = k_1 A \quad (7)$$

$$\frac{dC}{dt} = k_2 A \quad (8)$$

初期条件

$$A(0) = N, \quad B(0) = 0 \quad (9)$$

であり、これを解くと

$$A(t) = Ne^{-(k_1+k_2)t} \quad (10)$$

$$B(t) = -\frac{k_1}{k_1+k_2}Ne^{-(k_1+k_2)t} + \frac{k_1}{k_1+k_2}N \quad (11)$$

$$C(t) = -\frac{k_2}{k_1+k_2}Ne^{-(k_1+k_2)t} + \frac{k_2}{k_1+k_2}N \quad (12)$$

上の式のように、 $A(t)$ は指数関数の中身が k の和になるだけであり、全体としては単一の指数関数による減衰となる。つまり、このような並列に起こるプロセスでは、福島データのような複数の指数関数の和にはならないことがわかる。

2 「指数関数の和になるプロセス」とはどういうものか

よく行われているように、大気中セシウム濃度 $c(t)$ を

$$c(t) = c_1 e^{-k_1 t} + c_2 e^{-k_2 t} \quad (13)$$

のように書くことは、実質的には、ボックス A の中を最初から分割していることになる。つまり、ボックス A 内の全量のうち、 $c_1/(c_1 + c_2)$ の割合は k_1 のプロセスで移行し、残りの $c_2/(c_1 + c_2)$ の割合は k_2 のプロセスで移行すること（ある種の運命）を、はじめから決めていることになる。この仮説を検証するためには、次のようにすればよい。Cs-137 と Cs-134 のそれぞれの時系列データについて放射性崩壊の減衰分を補正し、それを指数関数の和で表す。はじめから運命が決まっている場合は Cs-137 でも Cs-134 でも同じ化学形で移行するはずなので、上記の指数関数のパラメータ c_1, c_2, k_1, k_2 は 4 つとも両方で同じ値になるはずである。

このような「運命的分割説」以外にも、指数関数の和となる場合はあり得る。図 3 は、連結した 3 ボックスモデルであり、1 つめのプロセス k_1 が起こった後に k_2 のプロセスが起こる。

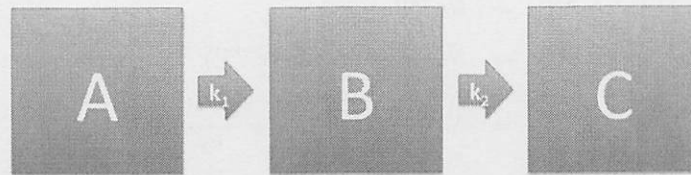


図 3:3 ボックスモデル

式で表すと

$$\frac{dA}{dt} = -k_1 A \quad (14)$$

$$\frac{dB}{dt} = k_1 A - k_2 B \quad (15)$$

$$\frac{dC}{dt} = k_2 B \quad (16)$$

初期条件は、

$$A(0) = N, \quad B(0) = C(0) = D(0) = 0 \quad (17)$$

これより

$$A(t) = N e^{-k_1 t}$$

式 (15) において、

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dt} &= k_1 A - k_2 B \\ \frac{dB}{dt} + k_2 B &= k_1 A \\ \frac{dB}{dt} e^{k_2 t} + k_2 B e^{k_2 t} &= k_1 A e^{k_2 t} \\ B' e^{k_2 t} + (e^{k_2 t})' B &= k_1 A e^{k_2 t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(Be^{k_2 t})' &= k_1 A e^{k_2 t} \\
Be^{k_2 t} &= \int k_1 N e^{(-k_1 + k_2)t} dt \\
B(t) &= N \frac{k_1}{k_2 - k_1} e^{-k_1 t} + Const * e^{-k_2 t}
\end{aligned}$$

初期条件 $B(0) = 0$ より

$$Const = -N \frac{k_1}{k_2 - k_1}$$

なので、

$$B(t) = N \frac{k_1}{k_2 - k_1} (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t})$$

式 (16) を $C(t)$ について解くと

$$C(t) = N \frac{k_1 k_2}{k_2 - k_1} \left(\frac{-e^{-k_1 t}}{k_1} + \frac{e^{-k_2 t}}{k_2} \right) + N$$

以上をまとめると

$$A(t) = N e^{-k_1 t} \quad (18)$$

$$B(t) = N \frac{k_1}{k_2 - k_1} (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}) \quad (19)$$

$$C(t) = N \frac{k_1 k_2}{k_2 - k_1} \left(\frac{-e^{-k_1 t}}{k_1} + \frac{e^{-k_2 t}}{k_2} \right) + N \quad (20)$$

以上のように、ボックスが3つあれば、2つの指数関数の和となる解が出てくる。例えば $B(t)$ 、あるいは $A(t) + B(t)$ などである。このモデルで、大気中セシウムの移行プロセスを表す場合、どうなるだろうか。もし計測値である大気中セシウムを $B(t)$ とすると、 $A(t)$ は高層大気など、ハイボリの計測器にかからないほど上空のセシウムの量と仮定すれば説明はつく。上空大気にはじめから存在するセシウムが、移行係数 k_1 で、地表付近の大気 (ボックス B) に降りてくる。以降は前述の2ボックスモデルと同様に、地中浸透や植生摂取で減衰する。指数関数2つの和による減衰は、たとえば、このようなモデルに対応すると考えられる。

更に、五十嵐 (2013) らの報告にあるように3つの指数関数の和になるケースでは、対応するボックスモデルは図4のようになる。

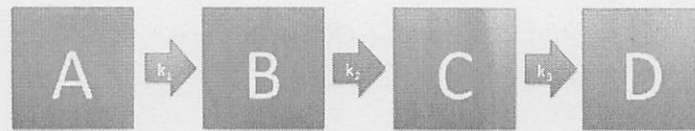


図4:4 ボックスモデル

式で表すと

$$\frac{dA}{dt} = -k_1 A \quad (21)$$

$$\frac{dB}{dt} = k_1 A - k_2 B \quad (22)$$

$$\frac{dC}{dt} = k_2 B - k_3 C \quad (23)$$

$$\frac{dD}{dt} = k_3 C \quad (24)$$

初期条件は、

$$A(0) = N, \quad B(0) = C(0) = D(0) = 0 \quad (25)$$

指数関数 2 つの場合に対応するコンパートメントモデルの結果を用いると

$$\begin{aligned} A(t) &= Ne^{-k_1 t} \\ B(t) &= N \frac{k_1}{k_2 - k_1} (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}) \end{aligned}$$

$C(t)$ も 3 ボックスモデルの $B(t)$ の導出と同様で、

$$C(t) = Nk_1k_2 \left\{ \frac{e^{-k_1 t}}{(k_2 - k_1)(k_3 - k_1)} + \frac{e^{-k_2 t}}{(k_1 - k_2)(k_3 - k_2)} + \frac{e^{-k_3 t}}{(k_1 - k_3)(k_2 - k_3)} \right\}$$

また、 $C(t)$ を用いて

$$D(t) = -Nk_1k_2k_3 \left\{ \frac{e^{-k_1 t} - 1}{k_1(k_2 - k_1)(k_3 - k_1)} + \frac{e^{-k_2 t} - 1}{k_2(k_1 - k_2)(k_3 - k_2)} + \frac{e^{-k_3 t} - 1}{k_3(k_1 - k_3)(k_2 - k_3)} \right\}$$

まとめると

$$A(t) = Ne^{-k_1 t} \quad (26)$$

$$B(t) = N \frac{k_1}{k_2 - k_1} (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}) \quad (27)$$

$$C(t) = \frac{Nk_1k_2}{(k_2 - k_1)(k_3 - k_1)} e^{-k_1 t} + \frac{Nk_1k_2}{(k_1 - k_2)(k_3 - k_2)} e^{-k_2 t} + \frac{Nk_1k_2}{(k_1 - k_3)(k_2 - k_3)} e^{-k_3 t} \quad (28)$$

$$D(t) = -Nk_1k_2k_3 \left\{ \frac{e^{-k_1 t} - 1}{k_1(k_2 - k_1)(k_3 - k_1)} + \frac{e^{-k_2 t} - 1}{k_2(k_1 - k_2)(k_3 - k_2)} + \frac{e^{-k_3 t} - 1}{k_3(k_1 - k_3)(k_2 - k_3)} \right\} \quad (29)$$

式 (28) を見ると、1 つのパラメータに従う指数関数の足し合わせとなっている。

これをベースに、外部からの流入を考えると図 5 のような図になる。簡単のため、傍流ボックスのパラメータは本流ボックスのものと仮定する。

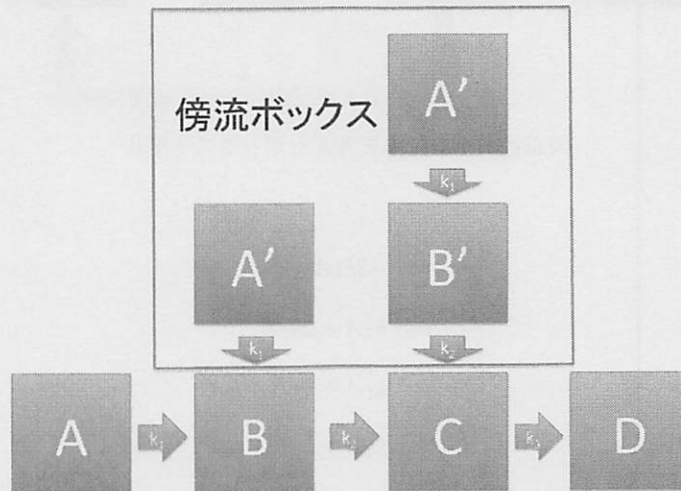


図 5: 傍流ボックスを考えたボックスモデル

微分方程式は

$$\frac{dA}{dt} = -k_1 A \quad (30)$$

$$\frac{dB}{dt} = 2k_1 A - k_2 B \quad (31)$$

$$\frac{dC}{dt} = 2k_2 B - k_3 C \quad (32)$$

$$\frac{dD}{dt} = k_3 C \quad (33)$$

であり、これらを解くと、

$$A(t) = N e^{-k_1 t} \quad (34)$$

$$B(t) = 2N \frac{k_1}{k_2 - k_1} (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}) \quad (35)$$

$$C(t) = \frac{4Nk_1k_2}{(k_2 - k_1)(k_3 - k_1)} e^{-k_1 t} + \frac{4Nk_1k_2}{(k_1 - k_2)(k_3 - k_2)} e^{-k_2 t} + \frac{4Nk_1k_2}{(k_1 - k_3)(k_2 - k_3)} e^{-k_3 t} \quad (36)$$

$$D(t) = -4Nk_1k_2k_3 \left\{ \frac{e^{-k_1 t} - 1}{k_1(k_2 - k_1)(k_3 - k_1)} + \frac{e^{-k_2 t} - 1}{k_2(k_1 - k_2)(k_3 - k_2)} + \frac{e^{-k_3 t} - 1}{k_3(k_1 - k_3)(k_2 - k_3)} \right\} \quad (37)$$

傍流ボックスを考えた時、本流ボックスと比べて指数関数の係数が大きくなる事が分かる。

また、本流ボックスのそれぞれで汚染物質の移動が起きていると考えると、図6のようになる。簡単のため、ボックスから流出する際のパラメータは、それぞれ同じものと仮定する。

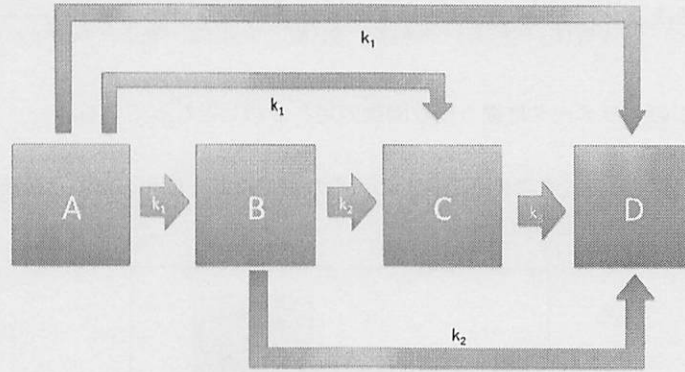


図6:各ボックスのを考えたボックスモデル

微分方程式は

$$\frac{dA}{dt} = -3k_1 A \quad (38)$$

$$\frac{dB}{dt} = k_1 A - 2k_2 B \quad (39)$$

$$\frac{dC}{dt} = k_1 A + k_2 B - k_3 C \quad (40)$$

$$\frac{dD}{dt} = k_1 A + k_2 B + k_3 C \quad (41)$$

であり、これを解くと

$$A(t) = N e^{-3k_1 t} \quad (42)$$

$$B(t) = N \frac{k_1}{-3k_1 + 2k_2} (e^{-3k_1 t} - e^{-2k_2 t}) \quad (43)$$

$$C(t) = \frac{3Nk_1(k_1 - k_2)}{(-3k_1 + 2k_2)(3k_1 - k_3)} e^{-3k_1 t} - \frac{Nk_1k_2}{(-3k_1 + 2k_2)(-2k_2 + k_3)} e^{-2k_2 t} \\ + \frac{Nk_1(3k_2 - k_3)}{(-3k_1 + k_3)(-2k_2 + k_3)} e^{-k_3 t} \quad (44)$$

$$D(t) = \frac{N(k_1 - k_2)}{(3k_1 - 2k_2)(3k_1 - k_3)} e^{-3k_1 t} + \frac{Nk_1}{2(3k_1 - 2k_2)(-2k_2 + k_3)} e^{-2k_2 t} \\ + \frac{Nk_1(3k_2 - k_3)}{k_3(3k_1 - k_3)(-2k_2 + k_3)} e^{-k_3 t} + \frac{N(6k_1k_2 - 4k_2^2 - k_1k_3 + 2k_2k_3)}{2(3k_1 - 2k_2)(2k_2 - k_3)k_3} \quad (45)$$

以上、本流ボックスのみ、傍流ボックス有り、それぞれのボックスが関係している、の3種類のモデルについて実際のデータを用いてフィッティングを行う。

3 ポアソン過程

移行係数を一定として、ボックス個数が無限にある時、 n 番目のボックスに放射性物質が存在する確率を考え、

$$\begin{aligned} n &: \text{状態} \\ p(n, t) &: \text{時刻 } t \text{ に状態 } n \text{ にある確率} \\ \lambda &: \text{次のボックスに移る率定数} \end{aligned}$$

とする。時間 $t=0$ で 0 番目のボックスに放射性物質が 1 つ出現したとする。このときその他のボックスは全て空である。つまり、

$$\begin{aligned} p(0, 0) &= 1 \\ p(n, 0) &= 0, n \neq 0 \end{aligned} \tag{46}$$

移行係数 λ は、単位時間に放射性物質が次のボックスへジャンプする確率である。よって、微小時間 dt に次のボックスへジャンプする確率は λdt である。ここで、放射性物質が微小時間 dt で、 n 番目のボックスに入る確率を考えると、

$$n \text{ 番目にいる確率} = (n-1 \text{ 番目から } n \text{ 番目に入ってくる確率}) - (n \text{ 番目から出て行く確率})$$

となる。これを式で表すと、

$$\begin{aligned} dp(n, t) &= -\lambda p(n, t)dt (n=0) \\ dp(n, t) &= \lambda p(n-1, t)dt - \lambda p(n, t)dt (n \geq 1) \end{aligned}$$

であり、両辺 dt で割ると

$$\frac{dp(n, t)}{dt} = -\lambda p(n, t) (n=0) \tag{47}$$

$$\frac{dp(n, t)}{dt} = \lambda p(n-1, t) - \lambda p(n, t) (n \geq 1) \tag{48}$$

となり、これをマスター方程式という。この方程式を解くために、母関数を用いる。母関数は

$$G(s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n p(n, t) \tag{49}$$

である。マスター方程式の $p(n, t)$ を $G(s, t)$ に変換すると、

$$G(s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n p(n, t) \tag{50}$$

式 (47)(48) について $p(n, t)$ を母関数 $G(s, t)$ に変換する。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{\infty} s^n p(n, t) &= -\lambda \sum_{n=0}^{\infty} s^n p(n, t) \\ \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^{\infty} s^n p(n, t) &= \lambda \sum_{n=1}^{\infty} s^n p(n-1, t) - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} s^n p(n, t) \end{aligned} \tag{51}$$

2つの式を足し合わせると

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{\infty} s^n p(n, t) &= \lambda \sum_{n=1}^{\infty} s^n p(n-1, t) - \lambda \sum_{n=0}^{\infty} s^n p(n, t) \\
\frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{\infty} s^n p(n, t) &= s\lambda \sum_{n=1}^{\infty} s^{n-1} p(n-1, t) - \lambda \sum_{n=0}^{\infty} s^n p(n, t) \\
\frac{d}{dt} G(s, t) &= \lambda s G(s, t) - \lambda G(s, t) \\
\frac{d}{dt} G(s, t) &= \lambda(s-1)G(s, t) \\
G(s, t) &= \text{Const} \times e^{\lambda(s-1)t}
\end{aligned} \tag{52}$$

Const を求めるために、 $G(s, 0)$ を考える。これは、母関数の式の $p(n, t)$ において、 $t = 0, n = 0, 1, 2, \dots$ を代入すると、

$$G(s, 0) = 1 \tag{53}$$

であるので、 $\text{Const} = 1$ となり、

$$G(s, t) = e^{\lambda(s-1)t} \tag{54}$$

である。最後に、 $G(s, t)$ を $p(s, t)$ に戻す。

$$\begin{aligned}
G(s, t) &= e^{\lambda(s-1)t} \\
&= e^{-\lambda t} e^{\lambda s t} \\
&= e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda s t)^n}{n!} \\
\sum_{n=0}^{\infty} s^n p(s, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} s^n e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}
\end{aligned} \tag{55}$$

上の式の両辺を比べると、

$$p(s, t) = \frac{\lambda t}{n!} e^{-\lambda t} \tag{56}$$

上の式は、ガンマ分布の式である。

以上から、今回提案したボックスモデルは、ガンマ分布と何らかの関係があるのではないと言える。

4 福島事故のデータによるデモンストレーション

五十嵐らのつくば市内における Cs-137 大気中濃度の計測値に対し、上記の理論を適用する。実測データから、式は以下になると推測できる。

$$N(t) = m_1 e^{-m_2 t} + m_3 e^{-m_4 t} + m_5 e^{-m_6 t} \quad (57)$$

であり、 m はそれぞれ、以下の表に対応する。

m_1	$1.9498 \cdot 10^7$
m_2	42.053
m_3	$3.5384 \cdot 10^6$
m_4	15.041
m_5	41161
m_6	0.56508

ここで、3 種類のボックスモデル (図 4,5,6 参照) において、3 つの指数分布の式の足し合わせである式 $C(t)$ を考える。式 (28) および式 (36) と式 (54) を比べると

$$\begin{aligned} k_1 &= m_2 \\ k_2 &= m_4 \\ k_3 &= m_6 \end{aligned}$$

であり、式 (44) と式 (54) を比べると、

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{m_2}{3} \\ k_2 &= \frac{m_4}{2} \\ k_3 &= m_6 \end{aligned}$$

である。初期値 N は式 (54) において $t = 0$ なので、

$$N = m_1 + m_3 + m_5 = 2.3078 \cdot 10^7$$

となる。これに従って 3 種類のボックスモデルについて、 $m_1 \sim m_6$ を求めて、その式からそれぞれの初期値を求める。これらをまとめたものが下の表になる。

	実測値 (Real data)	本流のみ (Basic data)	傍流有り (Branched data)	相互関係有り (Connected data)
m_1	$1.9498 \cdot 10^7$	$1.3025 \cdot 10^7$	$5.2100 \cdot 10^7$	$-5.6265 \cdot 10^6$
m_2	42.053	42.053	42.053	42.053
m_3	$3.5384 \cdot 10^6$	$-3.7330 \cdot 10^7$	$-1.4932 \cdot 10^8$	$-6.2218 \cdot 10^6$
m_4	15.041	15.041	15.041	15.041
m_5	$4.1161 \cdot 10^4$	$2.4305 \cdot 10^7$	$9.7720 \cdot 10^7$	$1.18484 \cdot 10^7$
m_6	0.56508	0.56508	0.56508	0.56508

これらを用いて、グラフをプロットすると次ページのようになる。

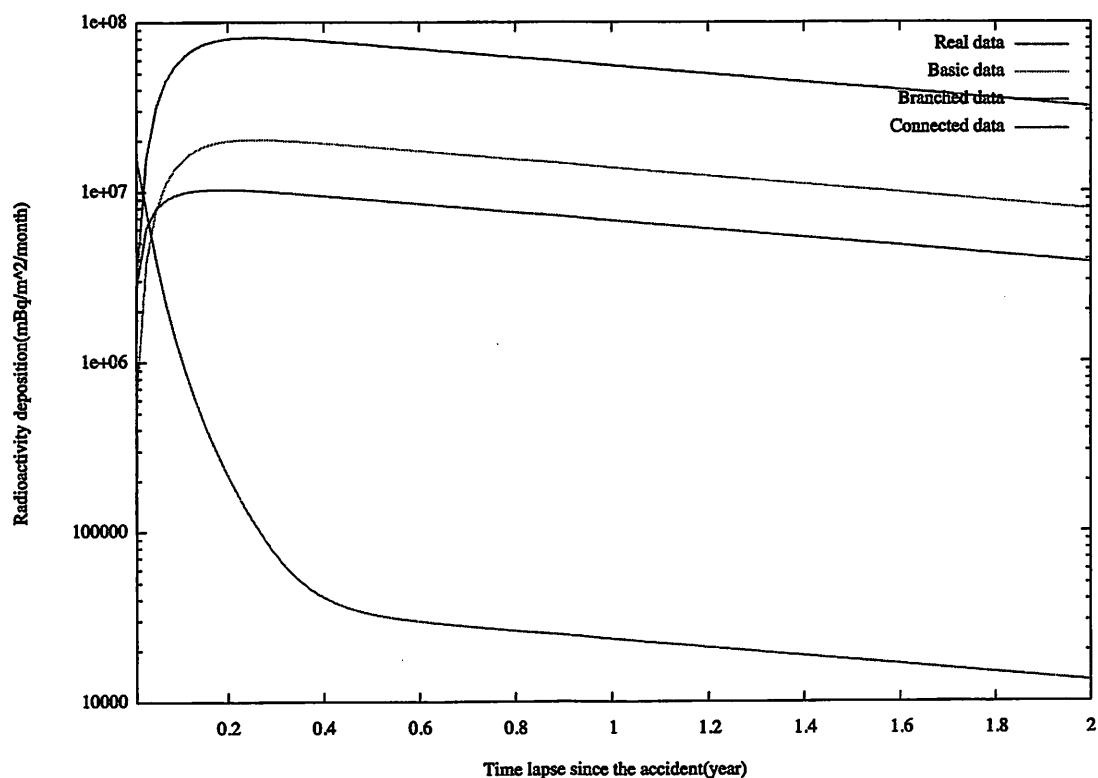


図 7:各ボックスモデルのグラフ

参考に元データのみのグラフも以下に添付する。

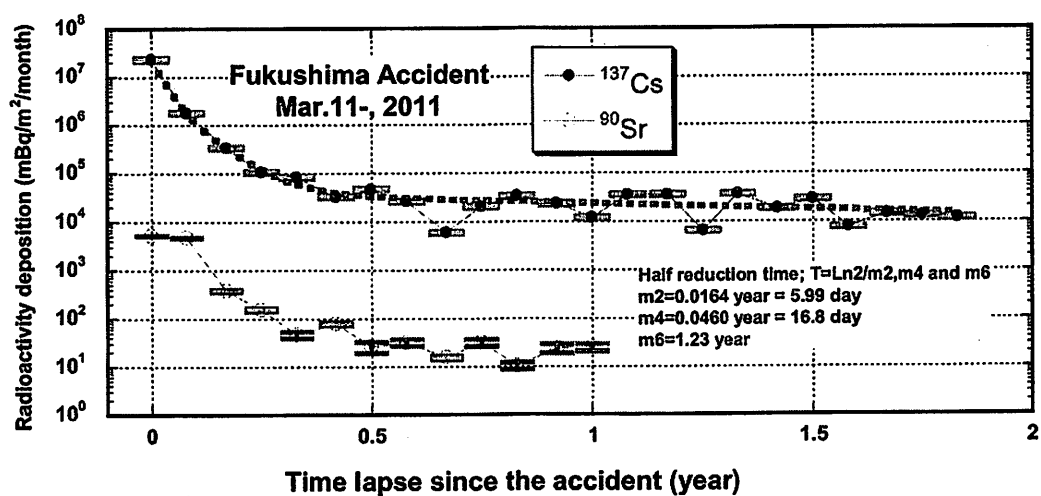


図 8:Curve fit for the decreasing trends with 3 exponentials 引用 : 五十嵐ら (2013)

考察

モデルから導出した式と、五十嵐らのデータから導出した式を見比べると、その式の形は、両方とも3つの指数関数の和となり、一致している。次に、図を見る。これを見ると、実際のデータをプロットしたもの

と、モデルから導出した式をグラフにしたものは一致しないことが分かる。

図を見ると、実際のデータのグラフは単調減少となっている。それに対して、モデルのグラフは一度増加した後減少する、という形になっている。これは、モデルの初期条件が影響している。4ボックスモデルの微分方程式を解くとき、初期条件を、 $A(0)=N, B(0)=C(0)=C(0)=0$ とした。これにより、 $C(t)$ のグラフは、スタートが0となる。しかし、実際のデータから導出したグラフはすでに $t=0$ で放射性物質が存在しており、これはボックスモデルにおいて初期条件 $C(0)=n$ (n はある定数、放射性物質の量) であることに相当する。つまり、ボックスモデルの初期値と実際のデータの初期値の違いが原因だと考えられる。

この問題を解決するために、事故前の放射線量のデータを用いることを考えた。事故前のデータを見ると事故直後は、つくばの放射線量はほぼ0である。そして、事後から少しの時間たってから、放射線量が急激に上昇した。この挙動は、ボックスモデルの式によく似ている。実際に事故現場をボックス $A(t)$ として、事故発生時間を $t=0$ とすると、モデルの初期条件と一致する。

5 ガイガーカウンターによる測定

ガイガーカウンターによる計測される放射性物質の個数の分布はポアソン分布に従うことが知られている。ここで、ガイガーカウンターの誤差を分布の標準偏差の1倍とする。よって、ガイガーカウンターの誤差を求めるためにポアソン分布の標準偏差を考える。まず、2項分布の平均値 μ および標準偏差 σ を考える。実験回数を N 、ある値（ここではガイガーカウンターに表示される値）を取る回数を n 、その確率を p とすると、平均値は

$$\mu = \sum_{n=0}^N n f_n \quad (58)$$

$$f_n = \frac{N!}{(N-n)!n!} p^n (1-p)^{(N-n)} \quad (59)$$

$$\sum_{n=0}^N f_n = \sum_{n=0}^N \frac{N!}{(N-n)!n!} p^n (1-p)^{(N-n)} = 1 \quad (60)$$

となる。(56), (57) を (55) に代入すると

$$\mu = \sum_{n=0}^N n \frac{N!}{(N-n)!n!} p^n (1-p)^{(N-n)} = Np \sum_{n=1}^N \frac{(N-1)!}{(N-n)!(n-1)!} p^{(n-1)} (1-p)^{(N-n)} \quad (61)$$

ここで、 $m = N-1, r = n-1$ とおくと

$$\mu = Np \sum_{r=0}^m \frac{m!}{(m-r)!r!} p^r (1-p)^{(m-r)} = Np \quad (62)$$

分散は

$$\sigma^2 = \sum_{n=0}^N n^2 f_n - \left(\sum_{n=0}^N n f_n \right)^2 \quad (63)$$

$$0 \sum_{n=0}^N n^2 f_n = \sum_{n=0}^N \{n(n-1) + n\} f_n = \sum_{n=0}^N \{n(n-1)\} f_n + \sum_{n=0}^N n f_n \quad (64)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \{n(n-1)\} f_n &= \sum_{n=0}^N \{n(n-1)\} \frac{N!}{(N-n)!n!} p^n (1-p)^{(N-n)} \\ &= N(N-1)p^2 \sum_{n=2}^N \frac{(N-2)!}{(N-n)!(n-2)!} p^{(n-2)} (1-p)^{(N-n)} \\ &= N(N-1)p^2 \\ \sigma^2 &= N(N-1)p^2 + Np - N^2p^2 = Np(1-p) \end{aligned} \quad (65)$$

以上より

$$\sigma = \sqrt{Np(1-p)} \quad (66)$$

ここで、ポアソン分布は2項分布において、平均 $\mu = Np$ を一定として、実験回数を無限に大きく、つまり $N \rightarrow \infty$ にする ($p \rightarrow 0$) ことで得られるので、ポアソン分布の平均と分散は

$$\mu = Np = \bar{n} \quad (67)$$

$$\sigma = \sqrt{\bar{n}} \quad (68)$$

で表される。ここで $\bar{n}$ はガイガーカウンターに表示される数値である。