Chapter 2　確率変数と分布関数

2.1　例題

白球 3 個（番号 1，2，3）と赤球 2 個（番号 4，5）の入った箱から，非復元抽出で連続して 2 個取り出す．この結果を列挙したものをΩとすると，Ωには 20 個の要素が含まれる．すなわち，

$$\Omega = \left\{\begin{matrix} (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (1,\ 5) \\ (2,\ 1),\ (2,\ 3),\ (2,\ 4),\ (2,\ 5) \\ (3,\ 1),\ (3,\ 2),\ (3,\ 4),\ (3,\ 5) \\ (4,\ 1),\ (4,\ 2),\ (4,\ 3),\ (4,\ 5) \\ (5,\ 1),\ (5,\ 2),\ (5,\ 3),\ (5,\ 4) \end{matrix}\right\}$$

ここで，Ωの各要素は確率$\dfrac{1}{20}$で生起する．このことから，Ωのすべての部分集合からなる集合

$$\mathcal{F}=\left\{\phi\ ,\left\{(1\ ,2)\right\},\dots,\left\{(5\ ,4)\right\},\left\{(1\ ,2)\ ,(1\ ,3)\right\},\dots,\Omega\right\}$$

の要素（すなわち事象）に対しても確率を定めることができる．例えば，事象$\{(4,\ 5),\ (5,\ 4)\}$の確率は　$\dfrac{1}{20}+\dfrac{1}{20}=\dfrac{1}{10}$　と与えることができ，事象$\{(4,\ 1),\ (4,\ 2),\ (4,\ 3),\ (5,\ 1),\ (5,\ 2),\ (5,\ 3)\}$に対しては，確率　$\dfrac{6}{20}$　を与えることができる．

ところで，ひとつの実験をしたとき，結果に関する詳細な情報ではなく，そのなかに見られる簡単な性質に興味があることがある．上述の実験でいえば,「どの球とどの球が抽出されたのか」ではなく,「2 個の球のうち白球は何個であったか」に興味があるといった場合がそうである．このとき白球の数をXと表わすと，2 個の球を取り出した結果$\omega\in\Omega$の各々に対して，Xの値は，2，1，0 のいずれかの値をとる．つまり，Xはωの関数とみなすことができ，$X=X(\omega)$と書くことができる．

では，例えば,「$X=2$となる確率」は考えることができるだろうか？また，その確率の値は，どのように決めることができるだろうか？これについては，

$$\left\{\omega : X(\omega)=2\right\}=\left\{(1\ ,2)\ ,(1\ ,3)\ ,(2\ ,1)\ ,(2\ ,3)\ ,(3\ ,1)\ ,(3\ ,2)\right\}$$　ゆえ，

$$P\left\{\omega : X(\omega)=2\right\}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$$　と考えればよい．

同様に,「$X=1$となる確率」や「$X=0$となる確率」も，つぎのように得ることができる．

$$P\left\{\omega : X(\omega)=1\right\}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5},\qquad P\left\{\omega : X(\omega)=0\right\}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$$

2.2　確率変数

事象全体の集合を $\mathcal{F}$ と書く．また，E が事象であることを，$E \in \mathcal{F}$ と表すことにしよう．さて，Ω 上で定義された $X(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$ に対して，$\{\omega : X(\omega) = a\}$ や $\{\omega : X(\omega) \le b\}$ などに確率を定めることができる場合がある．それを述べたのが Def.1 である。

Def. 1　$X(\omega)$ が確率変数（random variable： rv と略記することがある）

$\Leftrightarrow$　$\{\omega : X(\omega) \in I\} \in \mathcal{F}$　ここで，I は R^1 上の任意の区間

$\Leftrightarrow$　$P\{\omega : X(\omega) \in I\}$ を考えることができる

（注） R^1 には $\pm\infty$ が含まれないことから，区間 I としては，つぎの 9 種類が考えられる．

$$(a,b), (a,b], [a,b), [a,b], \{a\}, (-\infty,a), (-\infty,a], (a,+\infty), [a,+\infty)$$

（例）白球 3 ヶ，赤球 2 ヶの入った箱から，非復元抽出によってひとつずつ，合計 2 ヶの球を取り出す．

このとき，白球の数を X で表すと，X は確率変数である．例えば，

$$\{\omega : X(\omega) = 2\} \in \mathcal{F},\ \{\omega : X(\omega) = 1\} \in \mathcal{F},\ \{\omega : X(\omega) = 0\} \in \mathcal{F}$$

などが成り立つ．ただし，正確を期すには，9 種類の区間すべてについて調べる必要がある．

$X(\omega)$ が確率変数であるか否かを調べる際，9 種類の区間すべてについて検討しなければならないとすると，いかにも面倒であるが，実は，そのような心配は要らない．Def. 1 と等価であるが，より便利な定義（Def. 2）があるからである．

Def. 2　$X(\omega)$ が確率変数

$\Leftrightarrow$　$\{\omega : X(\omega) \le a\} \in \mathcal{F},\ \forall a \in R^1$

Def. 1 と Def. 2 が等価であることの証明（つぎの式を示せばよい）

$$\{\omega : X(\omega) \in I\} \in \mathcal{F},\ \forall I \quad \Leftrightarrow \quad \{\omega : X(\omega) \le a\} \in \mathcal{F},\ \forall a \in R^1$$

($\Rightarrow$)　明らか．実際，$I = \left(-\infty, a\right]$ とすればよい．

($\Leftarrow$)　この証明には，つぎに掲げる（1）～（8）のすべてが成立することを示す必要がある．ただし，実際には，（1）のみを証明しておけば，事象全体の集合 $\mathcal{F}$ が演算 $\cap$, ^{c} について閉じている（第 1 章付録 1 参照）ことから，（2）～（8）は自明となる．

(1) $\{\omega : X(\omega) < a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{\omega : X(\omega) \le a - \dfrac{1}{n}\right\} \in \mathcal{F}$

(2) $\{\omega : X(\omega) > a\} = \{\omega : X(\omega) \le a\}^c \in \mathcal{F}$

(3) $\{\omega : X(\omega) \ge a\} = \{\omega : X(\omega) < a\}^c \in \mathcal{F}$

(4) $\{\omega : a < X(\omega) < b\} = \{\omega : a < X(\omega)\} \cap \{\omega : X(\omega) < b\} \in \mathcal{F}$

(5) $\{\omega : a \le X(\omega) \le b\} = \{\omega : a \le X(\omega)\} \cap \{\omega : X(\omega) \le b\} \in \mathcal{F}$

(6) $\{\omega : a < X(\omega) \le b\} = \{\omega : a < X(\omega)\} \cap \{\omega : X(\omega) \le b\} \in \mathcal{F}$

(7) $\{\omega : a \le X(\omega) < b\} = \{\omega : a \le X(\omega)\} \cap \{\omega : X(\omega) < b\} \in \mathcal{F}$

(8) $\{\omega : X(\omega) = a\} = \{\omega : X(\omega) \le a\} \cap \{\omega : X(\omega) \ge a\} \in \mathcal{F}$

問１．2 個の正しく作られたサイコロを投げたとき，H が出たコインの数を Y と書く．

$P\{\omega : Y(\omega) = i\}$ $\left(i = 0, 1, 2\right)$ を定めよ．

問２．2 個の正しく作られたサイコロを投げたとき，それらの目の和を Z と書く．

$P\{\omega : Z(\omega) = i\}$ $\left(i = 2, \ldots, 12\right)$ を定めよ．

問 3.　$P\{H\}=p, P\{T\}=1-p$ なる性質を持つコインを H が出るまで投げ続けることにしよう．

最初に H が出たのが N 回目に投げたときであったとする．

（1）Ω を書け．

（2）$P\{\omega : N(\omega)=i\}\left(i=1,2,\ldots\right)$ を求めよ．

（3）$P\left\{\omega : N(\omega)=2 \text{ または } N(\omega)=4\right\}$ を求めよ．

（4）$P\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty} \{\omega : N(\omega)=i\}\right\}=1$ が成り立つことを示せ．

Def.1，Def. 2 が示すように，確率変数は実数値（したがって，有限の値）をとる．確率変数のうち，離散値をとるものを離散型確率変数（discrete rv）とよび，連続値をとるものを連続型確率変数（continuous rv）とよぶ．具体例は，それぞれ 2.4 節ならびに 2.5 節で述べる．

（補）$X(\omega), Y(\omega)$ を確率変数，c を定数とするとき，

（1）$X(\omega)+c$ は確率変数

（2）$cX(\omega)$ は確率変数

（3）$\{\omega : X(\omega)>Y(\omega)\}\in\mathcal{F}$

（4）$X(\omega)\pm Y(\omega)$ は確率変数

（5）$X^2(\omega)$ は確率変数

（6）$X(\omega)\cdot Y(\omega)$ は確率変数

すなわち，$X_1(\omega),\ldots,X_n(\omega)$ が確率変数であるとき，これらに定数を乗じたもの，有限回の可算，乗算を施して得られるものは，すべて確率変数である．

2.3　分布関数

$X(\omega)$ が確率変数であるとき，任意の b（ただし，$-\infty < b < \infty$）について，確率 $P\{\omega : X(\omega) \le b\}$ を考えることができる．この確率は，確率変数 X の分布関数とよばれ，X の性質を表現する上で基本的な役割を演じる．

Def.（確率変数 X の分布関数）$F(b) \triangleq P\{\omega : X(\omega) \le b\} = P\{X \le b\}$.

<u>分布関数の性質</u>

（P1）$F(b)$ は，b について単調非減少．すなわち，$a < b$ のとき，$F(a) \le F(b)$

（P2）$F(\infty) \triangleq \lim\limits_{n\to\infty} F(b) = 1$

（P3）$F(-\infty) \triangleq \lim\limits_{n\to-\infty} F(b) = 0$

（P4）$P\{\omega : a < X(\omega) \le b\} = F(b) - F(a)$．　ただし，$a < b$．

（P5）$P\{\omega : X(\omega) < b\} = \lim\limits_{h\to 0+} F(b-h) \triangleq F(b-0)$

（P6）$F(b)$ は，右連続．　すなわち，$\lim\limits_{h\to 0+} F(b+h) \triangleq F(b+0) = F(b)$

（証明）　（P1）と（P4）は明らか．それ以外のものについても直感的な議論が可能ではあるが，ここでは参考のため，第 1 章付録 2 を利用した証明を示しておく（はじめて学ぶ場合は，以下の証明は省略してよい）．

（P2）$\lim\limits_{n\to\infty} F(n) = 1$ を示せば良い．$E_n \triangleq \{\omega : X(\omega) \le n\}$ とおけば，

$$\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \{\omega : X(\omega) < \infty\} = \Omega$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} F(n) = \lim P(E_n) = P(\lim E_n) = P(\Omega) = 1$$

（P3）$\lim\limits_{n\to\infty} F(-n) = 0$ を示す．$E_n \triangleq \{\omega : X(\omega) \le -n\}$ とおけば，

$$\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \{\omega : X(\omega) = -\infty\} = \phi$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} F(-n) = \lim P\left(E_n\right) = P\left(\lim E_n\right) = P(\phi) = 0$$

(P5) $P\{\omega : X(\omega) < b\} = \lim_{n\to\infty} F\left(b - \dfrac{1}{n}\right)$ を示す．$E_n \triangleq \left\{\omega : X(\omega) \leq b - \dfrac{1}{n}\right\}$ とおくと，

$$\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \{\omega : X(\omega) < b\}$$

$$\therefore P\{\omega : X(\omega) < b\} = P(\lim E_n) = \lim P\left(E_n\right) = \lim F\left(b - \frac{1}{n}\right)$$

(P6) $\lim_{n\to\infty} F\left(b + \dfrac{1}{n}\right) = F(b)$ を示す．$E_n \triangleq \left\{\omega : X(\omega) \leq b + \dfrac{1}{n}\right\}$ とおけば，

$$\lim E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \{\omega : X(\omega) \leq b\}$$

$$\therefore \lim F\left(b + \frac{1}{n}\right) = \lim P\left(E_n\right) = P\left(\lim E_n\right) = P\{\omega : X(\omega) \leq b\} = F(b)$$

以降において，特に誤解の恐れがないときは，$P\{\omega : X(\omega) \leq b\}$ を $P\{X \leq b\}$ と表記する．

問１．つぎの各式を証明せよ．

(1) $P\{a \leq X \leq b\} = F(b) - F(a-0)$

(2) $P\{a < X \leq b\} = F(b) - F(a)$

(3) $P\{a \leq X < b\} = F(b-0) - F(a-0)$

(4) $P\{a < X < b\} = F(b-0) - F(a)$

(5) $P\{X = a\} = F(a) - F(a-0)$

(6) $P\{X > a\} = 1 - F(a)$

(7) $P\{X \geq a\} = 1 - F(a-0)$

問 2．2.1 節の例題で示したように，白球 3 個（番号 1，2，3）と赤球 2 個（番号 4，5）の入った箱から非復元抽出で連続して 2 個取り出すとき，そのうちに含まれる白球の数 X について，

$$P\{X=0\}=\frac{1}{10},\ \ P\{X=1\}=\frac{3}{5},\ \ P\{X=2\}=\frac{3}{10}$$

を得た．このとき，つぎの各式が成立することを確認せよ．

(1) $P\{0 \le X \le 1\} = F(1) - F(0-0)$

(2) $P\{0 < X \le 1\} = F(1) - F(0)$

(3) $P\{0 \le X < 1\} = F(1-0) - F(0-0)$

(4) $P\{0 < X < 1\} = F(1-0) - F(0)$

(5) $P\{X = 0\} = F(0) - F(0-0)$

(6) $P\{X > 0\} = 1 - F(0)$

(7) $P\{X \ge 0\} = 1 - F(0-0)$

（注 1）以上のことから，分布関数 F が与えられれば，R^1 上の任意の区間 I に対し，$P\{\omega : X(\omega) \in I\}$ が求まることがわかる．

（注 2）分布関数は distribution function というが，記号では Cdf と書くことがある．ここに C は cumulative（累積）の意．

（注 3）本節では，Cdf を $F(b) \triangleq P\{\omega : X(\omega) \le b\}$ と定義したことにより，F の右連続性を得た．しかし，$F(b) \triangleq P\{\omega : X(\omega) < b\}$ と定義することも可能であり，そのように定義している教科書もある．そのときは，F は左連続となる．すなわち，$\lim_{h\to 0+} F(b-h) \triangleq F(b-0) = F(b)$．

2.4　離散型確率変数

白球 3 個（番号 1，2，3）と赤球 2 個（番号 4，5）の入った箱から非復元抽出で連続して 2 個取り出すとき，そこに含まれる白球の数 X は，0，1，2 のいずれかの値をとる（2.1 節冒頭参照）．このような「とびとびの値を取る」確率変数のことを，離散型（discrete）確率変数とよぶ．すなわち，離散型確率変数とは，$x_1, x_2, \dots$ など，高々可算無限個の値をとり得る確率変数をいう．

離散型確率変数の性質を表わす基本情報が，つぎに定義する離散型確率分布である．

Def.（離散型確率分布）　$p(x_i) \triangleq P\{\omega : X(\omega) = x_i\} = P\{X = x_i\} \qquad (i = 1, 2, \dots)$

$p(\cdot)$ を probability mass function（pmf と略記）とよぶ.

<u>**pmf の性質**</u>

（1）　$p(x) > 0$，　for　$x = x_i \quad (i = 1, 2, \dots)$

$p(x) = 0$，　otherwise

（2）　$\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$

つぎの各式は pmf の定義から明らかであろう．

$$F(b) = \sum_{x_i:\, x_i \le b} p(x_i)$$

（注）右辺は $\displaystyle\sum_{\{i:\, x_i \le b\}} p(x_i)$ と書いてもよい

$$P\{a \le X \le b\} = \sum_{x_i:\ a \le x_i \le b} p(x_i)$$

問1.　pmf がつぎのように与えられる確率変数 X がある．

$$p(i) = P\{X = i\} = c\lambda^i / i! \quad (\lambda > 0,\ i = 0, 1, 2, \dots)$$

（1）定数 c の値を求めよ．

（2）$P\{X > 2\}$ を求めよ．

問2.　X の pmf をつぎのように定める．

$$p(-2) = 1/3 \;,\; p(0) = 1/4 \;,\; p(1) = 5/12$$

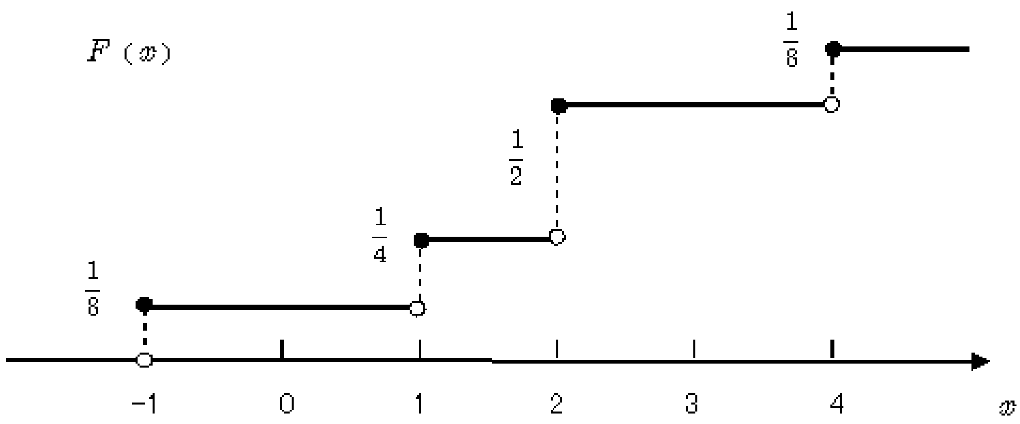
(1) F のグラフを描き，右連続性を確かめよ．

(2) $P\{-1 \le X < 0\} =$

(3) $P\{0 \le X \le 2\} =$

(4) $P\{X > 0\} =$

問 3.　X の Cdf　$F(x)$ が下図のように与えられているとしよう．



（1）pmf　p を求め，グラフを描け.

（2）$P\{X=0\}$ ＝

（3）$P\{|X| \le 1\}$ ＝

（4）$P\{2X-3>0\}=$

（5）$P\{X^2>2\}=$

<u>ベルヌーイ型</u>（**Bernoulli**）**確率変数**

pmf　　$p(0)=P\{X=0\}=1-p$ ，$p(1)=P\{X=1\}=p$

ベルヌーイ型確率変数は，（1）コインを投げたとき表が出るか，裏が出るか，（2）ロケットを打ち上げたとき，打ち上げが成功するか，失敗するか，など，２者択一の結果を論じる場合に使用される.

<u>**二項型**</u>**（binomial）確率変数：**　　（注）次式で定義される二項分布を $B(n,\,p)$ と書く

pmf　　$p(i)=P\{X=i\}=\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}$　　$(i=0,1,\ldots,n)$

問 4.　$\sum_{i=0}^{n} p(i)=1$ を示せ.

問 5．煙検知センサ 3 個によって構成されている火災警報システムがあったとする．3 個のセンサのうち 2 個以上が煙を検知したときに火災警報を発するようにロジックが組まれているとき，このシステムを 2-out-3 の多数決冗長系という．火災でもないのに煙があるとセンサが誤って判断する確率を p とするとき，不必要な火災警報が発せられる確率を求めよ．

問 6．エアバス A380 のように，左右の主翼に 2 基ずつのエンジンを持つ 4 発機を想定しよう．

（1） 2 基以上のエンジンが正常でありさえすれば飛行の安全にはなんら支障はないとするなら，その 4 発機が無事に飛行を終える確率はいくらか．ここで，飛行中に故障が発生しない確率は，どのエンジンについても p とし，各エンジンの故障は独立であると仮定する．

（2） もし，左右の主翼の各々に少なくとも 1 基以上の正常なエンジンがないと，飛行の安全が確保できないといった 4 発機であったなら，その 4 発機が無事に飛行を終える確率はいくらか.

<u>幾何学型</u>（geometric または Pascal）確率変数

pmf $\quad p(i) = P\{X = i\} = (1-p)^{i-1}\,p \qquad \left(i = 1, 2, \ldots\right)$

成功あるいは失敗といった 2 者択一的な結果を持つ独立なベルヌーイ試行を，成功が出るまで継続するという状況で出現するのが幾何型確率変数である．例えば，つぎのようなケースである．

（1）ある特別番組が放送されているが，どのチャンネルで放送されているのか分からないとき，その放送が見つかるまでリモコンでランダムにチャンネル番号を入力するものとしよう（そのような人はいないかもしれないが…）. ヒットする確率が高いのは何回目であるかを調べたい.

（2）講義は終わっても，サイコロを振って「1 の目」が出るまで教室を出ることが許されない．しかも,「1 回サイコロを振ってからつぎにサイコロを振るまで，10 分間待たねばならない」という狂気の沙汰ともいえるルールが定められている．いったい，講義が終わってから無事にその部屋を出るまでにかかる時間は，どのような分布になるのかを調べたい.

問 7．箱の中に白球 N 個，赤球 M 個が入っている．赤球が出るまで復元抽出を反復するものとする.

（1）n 回目に初めて赤球が出る確率はいくらか.

（2）初めて赤球が出るまで少なくとも k 回を要する確率を求めよ.

<u>ポアソン型</u>（**Poisson**）**確率変数**

pmf $\quad p(i)=P\{X=i\}=e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^i}{i!} \qquad \left(\lambda>0,\, i=0,1,2,\ldots\right)$

問 8．$\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} p(i)=1$ を示せ.

ポアソン型確率変数は，「n が大，p が小，かつ np が適当な大きさ」であるような二項分布 $B\left(n,\,p\right)$ にしたがう確率変数の近似であるとみなすことができる．

$(\because)$　$\lambda = np$ とすると，

$$P\{X=i\} = \binom{n}{i} p^{i}(1-p)^{n-i} = \binom{n}{i}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^{i}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-i}$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{n^{i}}\frac{\lambda^{i}}{i!}\frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{i}}$$

ここで，$n \to \infty$（i は固定）とすると，

$$P\{X=i\} \to e^{-\lambda}\frac{\lambda^{i}}{i!}$$

（注）上の議論では，解析学で学んだつぎの性質を用いている．

$$\lim_{h\to\pm 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$$

このことから，新聞 1 ページの中の誤植数，単位時間内に故障する機械の台数，単位時間に窓口に来る客の数などがポアソン型確率変数で表現できることがわかる．

問 9. 新聞 1 ページ中の誤字数が $\lambda = 1/2$ のポアソン分布に従うとする．1 ページに 1 個以上の誤字がある確率を求めよ．

問 10. ある PC の 1 日の故障回数は $\lambda = 2$ のポアソン分布に従うという．1 日の間，全く故障しない確率はいくらか．

2.5　連続型確率変数

任意の$a, b\left(a \leq b\right)$に対し，$P\left\{a \leq X \leq b\right\} = \int_a^b f(x)\,dx$を満たす非負関数$f$が存在するとき，$X$を連続型（continuous）確率変数とよび，$f(\cdot)$を確率密度関数（probability density function，pdf と略記）とよぶ.

pdf の性質

（1）$f(x) \geq 0 \qquad \forall x$

（2）$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

Cdf と pdf

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du \qquad \text{または} \qquad f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

連続型確率変数の特徴は，$P\left\{X = a\right\} = 0\left(\forall a\right)$，すなわち，その確率変数が特定の値（たとえば，$a$）をとる確率は，$a$のいかんによらず 0 となることである（ただし，その特定の値をとることができないといっているわけではない）．このことから次式が成立する.

$$P\left\{a \leq X \leq b\right\} = P\left\{a \leq X < b\right\} = P\left\{a < X \leq b\right\} = P\left\{a < X < b\right\}$$

また,

$$P\left\{X \leq b\right\} = P\left\{X < b\right\}$$

すなわち，$F\left(b\right) = F\left(b-0\right)$が成立することから，$F$は左連続である．ところで，$F$は右連続であった（2.3（P6））．右連続であり左連続でもあることから，結局，Fは連続であることになる.

問 1．pdf が $f(x) = \begin{cases} 6x(1-x), 0 \leq x \leq 1 \\ 0, \qquad \text{otherwise} \end{cases}$

で与えられる確率変数Xに対し，Cdf $F(x)$を求めよ．また，$f(x), F(x)$のグラフを描け.

一様分布（**uniform distribution**）

$$\text{pdf}\quad f(x)=\begin{cases}1/(b-a), & a<x<b\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}\quad\Rightarrow\quad \text{「}X\text{ は }(a,b)\text{ 上の一様分布に従う」という}$$

問 2. (a,b) 上の一様分布に従う確率変数 X の Cdf $F(x)$ を求めよ.

　一様分布は，確率変数がどのような範囲の値をとり得るかは分かっているものの，それ以上の知識や情報を持ち合わせていない場合に用いられる. すなわち，「X は (a,b) 上の一様分布に従う」とは，X が区間 (a,b) 上のどの値をとりやすいか（とりにくいか）については，まったくわからない状況を表す.「X は，(a,b) 上でランダムな値をとる」という表現が用いられるのも，一様分布である.

問 3. X が区間 $(0,10)$ 上の一様分布に従うとき，$P\{X<3\}, P\{X>7\}, P\{1<X<6\}$ を求めよ.

問 4. X が区間 (a,b) 上の一様分布に従うとき，$Y=(X-a)/(b-a)$ の Cdf と pdf を求めよ.

<u>指数分布</u>（exponential distribution）

pdf　$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x},\ x\geq 0\\ 0, \quad \text{otherwise}\end{cases}$　⇒「X はパラメータ $\lambda(>0)$ の指数分布に従う」という

問 5. パラメータ $\lambda(>0)$ の指数分布に従う確率変数 X の Cdf　$F(x)$ を求めよ.

指数分布は，システムやその構成要素の寿命（寿命時間）が従う分布として用いられることが多い. 数学的に扱いやすいことから，確率過程論（特に，マルコフ過程）やシステム信頼性理論などで重要な役割を果たしている．その際立った特徴として，無記憶性（memory-less property）と称される性質がある．この性質は，つぎのように言い表すことができる.

『寿命が指数分布に従うシステムがあったとする．新品のシステムが時刻 0 から使用に供され，10 年経ってもなお正常に作動していることが確認できたなら，そのシステムはすでに 10 年間にわたって使用されてきた「中古品」であるが，正常であることが確認された時刻（使用開始後，ちょうど 10 年目にあたる時刻）において使用が開始されたばかりの「新品」であるとみなすことができる.』

このことを，数式をつかって表現してみよう.

時刻 t においてシステムの寿命 X がまだ尽きていない確率，すなわち，時刻 t においてシステムが正常な機能を保持している確率を $R(t)=P\{X>t\}$ と書き，システムの信頼度（reliability）とよぶ．ちなみに，$R(t)=1-P\{X\leq t\}=1-F(t)$ である.

システムの寿命が指数分布に従うときは，$R(t)=e^{-\lambda t}$ となる. 指数法則により, $e^{-\lambda(t+s)}=e^{-\lambda t}e^{-\lambda s}$,

すなわち，$R\left(t+s\right)=R(t)R(s)$ であるが，これは，つぎのように書き換えることができる.

$$\frac{R(t+s)}{R(t)}=R(s)$$

ところで,

$$\text{（左辺）}=\frac{P\{X>t+s\}}{P\{X>t\}}=P\{X>t+s\,|\,X>t\}$$

$$\text{（右辺）}=P\{X>s\}$$

であるから,

$$P\{X > t+s \mid X > t\} = P\{X > s\}$$

あるいは

$$P\{X \le t+s \mid X > t\} = P\{X \le s\}$$

を得る．これが無記憶性の数式表現である．

（注）　たとえば，無記憶性を表す式において，$t = 1000\,(hrs)$, $s = 1(hr)$ としてみたとき，その式が何を意味するかを考えてみよ．

問 6．X がパラメータ λ の指数分布に従うとき，$Y = 1 - 2X$ の Cdf と pdf を求めよ．

ガンマ分布（Gamma distribution）

$$\text{pdf} \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}, & x \ge 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad \Rightarrow$$

「パラメータ (n, λ) の
ガンマ分布に従う」という．
（$\lambda > 0$, n は自然数）

（注 1）$n = 1$ のとき，指数分布に帰着される．

（注 2）$X_i\ (i = 1, 2, \ldots, n)$ がパラメータ λ の指数分布に従うとき，$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ は，パラメータ (n, λ) のガンマ分布に従う．

<u>正規分布</u>（**normal distribution**）：$N\left(\mu,\sigma^2\right)$

$$\text{pdf}\quad f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\qquad -\infty<x<\infty$$

μ を平均（mean），σ^2 を分散（variance）とよぶ（後述）．

問 7．$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{2\pi}$ を示せ．

問 8．f を正規分布の pdf とするとき，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=1$ が成立することを示せ．（問 7 を用いよ）

問 9．X が $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ に従うとき，$Y=\alpha X+\beta$（α,β は定数）も正規分布に従うことを示せ．

（ヒント：$\alpha>0,\alpha<0$ に分けて考えよ）

問 10．X が $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ に従うとき，$Y=\left(X-\mu\right)/\sigma$ は標準正規分布 $N\left(0,1\right)$ に従うことを示せ．

（ヒント：問 9 を用いよ）