

# 各解法のアルゴリズム

- 今回提示した漸化式を忠実に翻訳した形
- 解を求める時刻の最大値:  $T$
- 解を求める時間の分割数:  $N$
- $\Delta t \leftarrow T/N$

# オイラー法のアルゴリズム

入力:  $y' = f(t, y)$ : 微分方程式,  $y(0) = a$ : 初期値条件,

$T$ : 解を求める時刻,  $N$ : 解を求める時間の分割数

出力:  $Y(T)$ :  $t = T$ における微分方程式の解  $y$  の近似値 ( $Y$ : 微分方程式  $y' = f(t, y)$  を近似した差分方程式 (5.38) の解)

# オイラー法のアルゴリズム

1.  $\Delta t \leftarrow T/N; \quad Y \leftarrow a;$
2. for ( $j \in [0..n-1]$ )
  - a.  $t \leftarrow j \Delta t;$
  - b.  $Y \leftarrow Y + \Delta t f(t, Y);$
3. return  $Y;$

# ホイン法のアルゴリズム

入力:  $y' = f(t, y)$ : 微分方程式,  $y(0) = a$ : 初期値条件,

$T$ : 解を求める時刻,  $N$ : 解を求める時間の分割数

出力:  $Y(T)$ :  $t = T$ における微分方程式の解  $y$  の近似値 ( $Y$ : 微分方程式  $y' = f(t, y)$  を近似した差分方程式 (5.38) の解)

# ホイン法のアルゴリズム

1.  $\Delta t \leftarrow T/N; \quad Y \leftarrow a;$
2. for ( $j \in [0..n-1]$ )
  - a.  $t \leftarrow j \Delta t;$
  - b.  $k_1 \leftarrow f(t, Y); \quad k_2 \leftarrow f(t + \Delta t, Y + \Delta t k_1);$
  - c.  $Y \leftarrow Y + (\Delta t / 2) (k_1 + k_2);$
3. return  $Y;$

# ルンゲ-クッタ法のアルゴリズム

入力:  $y' = f(t, y)$ : 微分方程式,  $y(0) = a$ : 初期値条件,

$T$ : 解を求める時刻,  $N$ : 解を求める時間の分割数

出力:  $Y(T)$ :  $t = T$ における微分方程式の解  $y$  の近似値 ( $Y$ : 微分方程式  $y' = f(t, y)$  を近似した差分方程式 (5.38) の解)

# ルンゲ-クッタ法のアルゴリズム

1.  $\Delta t \leftarrow T/N; \quad Y \leftarrow a;$
2. for ( $j \in [0..n-1]$ )
  - a.  $t \leftarrow j \Delta t;$
  - b.  $k_1 \leftarrow f(t, Y);$   $k_2 \leftarrow f\left(t + \frac{\Delta t}{2}, Y + \frac{\Delta t}{2}k_1\right);$   
 $k_3 \leftarrow f\left(t + \frac{\Delta t}{2}, Y + \frac{\Delta t}{2}k_2\right);$   $k_4 \leftarrow f(t + \Delta t, Y + \Delta tk_3);$
  - c.  $Y \leftarrow Y + (\Delta t / 6) (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4);$
3. return  $Y;$

## 近似の考え方と計算の手間

- 各差分法の近似の考え方については後で説明
- 計算の手間:  $f(t, y)$  の計算の手間が全体の計算の手間の主要部を占める
- 各差分法の1回反復あたりの  $f(t, y)$  の計算回数
  - オイラー法: 1回
  - ホイン法: 2回
  - ルンゲ-クッタ法: 4回

計算の手間の比:  
1:2:4

# 局所打ち切り誤差

- 差分解の微分解からの「ずれ」の目安の見積もり
- $t = t_j$  での微分解の値  $y(t_j)$  を差分方程式の  $Y_j$  に代入し、 $Y_{j+1}$  を求めると

$$Y_{j+1} = y(t_j) + \Delta t F(t_j, y(t_j))$$

- $Y_{j+1}$  と  $y(t_{j+1})$  との誤差:

$$|y(t_{j+1}) - Y_{j+1}| = |y(t_{j+1}) - y(t_j) - \Delta t F(t_j, y(t_j))|$$

# 局所打ち切り誤差

- 局所打ち切り誤差 (local truncation error)

$$\delta = \left| \frac{y(t_{j+1}) - y(t_j)}{\Delta t} - F(t_j, y(t_j)) \right|$$

- $\delta$  を  $O((\Delta t)^p)$  で評価したとき
  - $p$ : 誤差の次数 (order)
  - その差分方程式を **$p$ 次の公式**と呼ぶ

## 局所打ち切り誤差

- オイラー法における局所打ち切り誤差の評価

$t_j$ における  $y(t)$  の Taylor展開

$$y(t_{j+1}) = y(t_j) + \Delta t y'(t_j) + O((\Delta t)^2)$$

より

$$\begin{aligned} \frac{y(t_{j+1}) - y(t_j)}{\Delta t} - f(t_j, y(t_j)) &= y'(t_j) - f(t_j, y(t_j)) + O(\Delta t) \\ &= O(\Delta t) \end{aligned}$$

オイラー法は1次の公式

# 局所打ち切り誤差

- 同様にして、以下が確かめられる
  - ホイン法は2次の公式
  - ルンゲ-クッタ法は4次の公式

## 5-4 1階常微分方程式の初期値問題

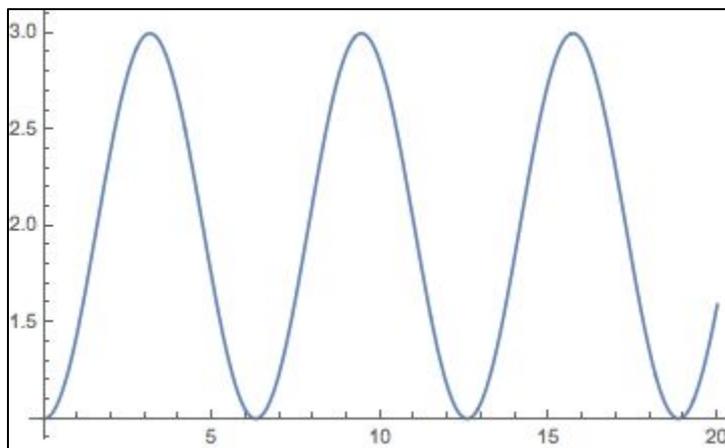
# 1階常微分方程式の初期値問題: 積分 (5.13)

$$y' = \sin(t) \quad (5.52a)$$

$$y(0) = 1 \quad (5.52b)$$

[解]

$$y(t) = \int_0^t \sin t \, dt + y(0) = 2 - \cos t$$



# オイラー法の計算例

差分方程式と初期条件:

$$(Y_{j+1} - Y_j) / (\Delta t) = \sin(t_j) \quad (5.53a)$$

$$Y_0 = 1 \quad (5.53b)$$

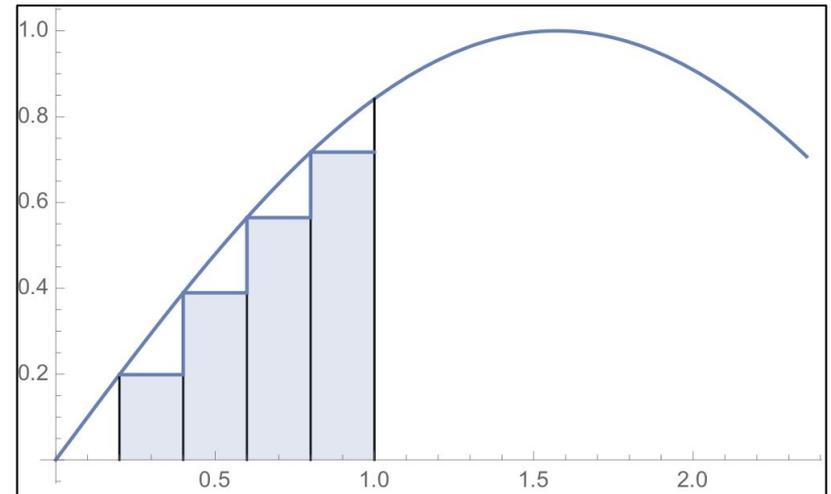
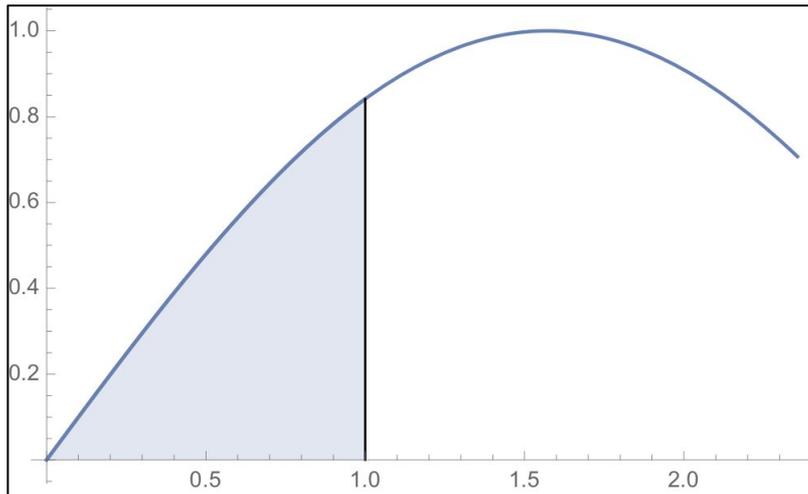
上を解いて、式 (5.52) を満たす  $y(t)$  の  $t=1$  における  
値を推定する

# オイラー法の計算例

- $N > 0$  を自然数とし、 $\Delta t = 1/N$  において  $Y_N$  をオイラー法で計算する
- 表 5-4:  $N = 10, 100, 1000, 10000$  に対し、それぞれ  $Y_N$  を計算した結果
- 微分解の値は  $y(1) = 2 - \cos(1) = 1.459697\dots$

# オイラー法の計算例

- 微分解:  $y(1) = 1 + \int_0^1 \sin t \, dt$
- 差分分解:  $Y_N = 1 + \Delta t \sum_{j=0}^{n-1} \sin t_j$



# オイラー法の計算例

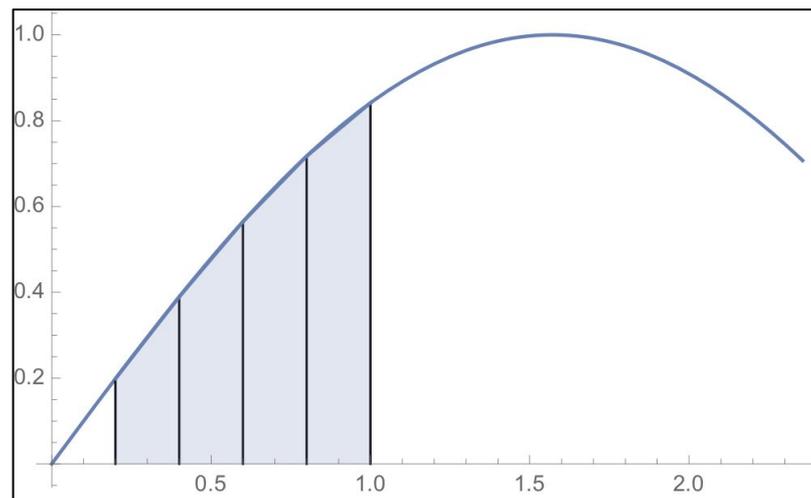
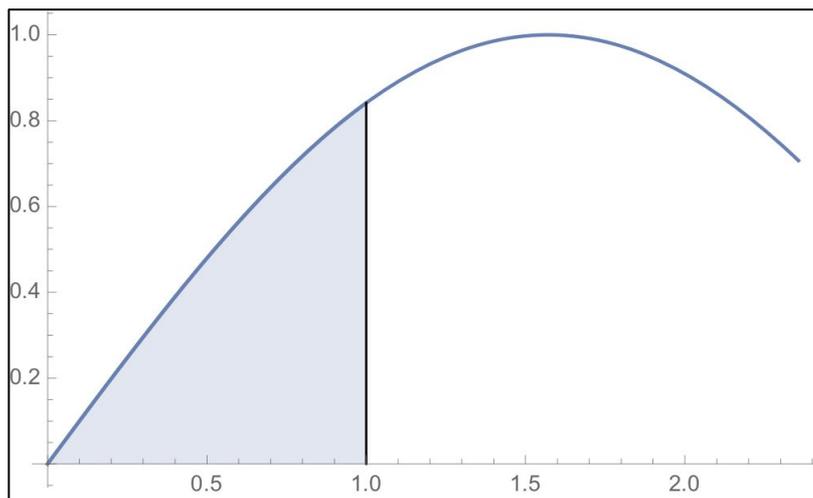
- この問題で、微分解の積分の部分を、差分解では区分解法で近似して求めている⇒区分解法に対応
- $\Delta t$  を1桁小さくすると、 $Y_N$  の真の値と一致する桁数がだいたい1桁増える⇒オイラー法が1次の公式であることを反映

## (補足) ホイン法の計算例

ホイン法の差分解:

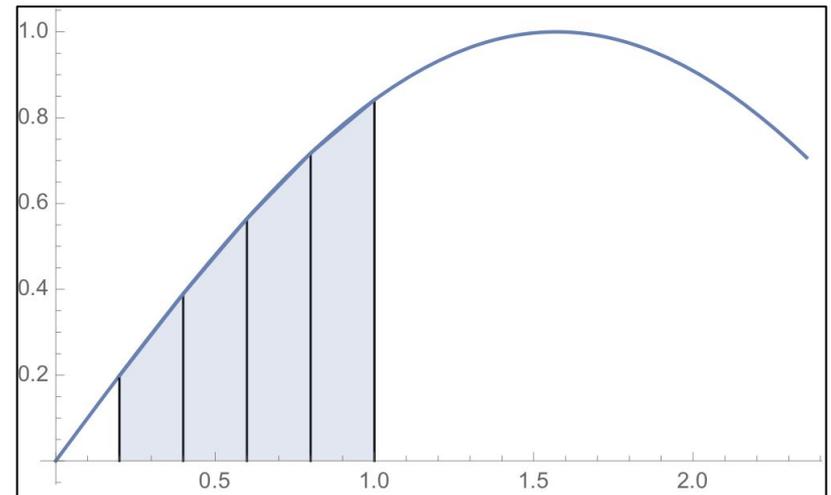
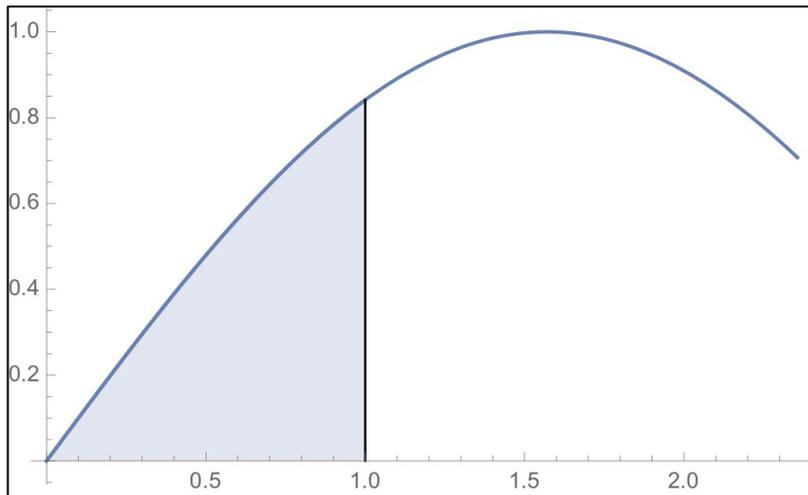
$$k_1 \leftarrow \sin(t_j); k_2 \leftarrow \sin(t_j + \Delta t);$$

$$Y_{j+1} \leftarrow Y_j + (\Delta t / 2) (k_1 + k_2);$$



## (補足) ホイン法の計算例

- この問題で、微分解の積分の部分を、差分解では台形公式で近似して求めている⇒台形則に対応



# 1階常微分方程式の初期値問題: 生物の増殖 (5.14)

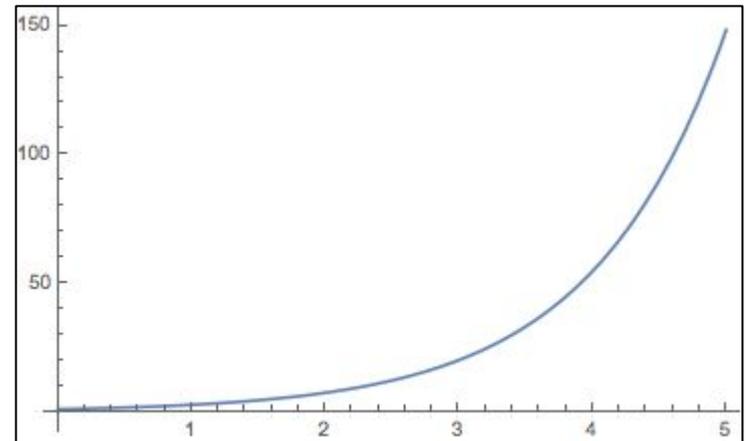
ある生物が理想的な環境下で増殖するモデル

時刻  $t$  での生物の個体数:  $y(t)$ , 時刻0での個体数: 1

$$y' = y \quad (5.54a)$$

$$y(0) = 1 \quad (5.54b)$$

[解]  $y(t) = \exp(t)$



## 各方法の計算結果の比較

- 図 5-15: 微分解  $y = \exp(t)$  と、オイラー法、ホイン法、ルンゲ-クッタ法による差分解の比較  
( $\Delta t = 1/2$ )
  - 次数が高い公式ほど微分解に近づく
  - ルンゲ-クッタ法による差分解は微分解にほぼ一致

## 各方法の計算結果の比較

- 図 5-16: オイラー法を用いて、 $\Delta t = 1/2, 1/4, 1/8, 1/16$  とした場合の差分解の比較
  - $\Delta t$  が小さいほど微分解に近づく

## 各方法の計算結果の比較

- 表 5-5: 各方法で  $\Delta t = 0.1, 0.01$  とした場合の  $Y_N$  の値 ( $y(1)$  の推定値)
  - $\Delta t$  を 0.1 から 0.01 にした場合の誤差の大きさの変化
    - オイラー法:  $O(1/10)$
    - ホイン法:  $O(1/10^2)$
    - ルンゲ-クッタ法:  $O(1/10^4)$

## 各方法の計算結果の比較

- 表 5-5: 各方法で  $\Delta t = 0.1, 0.01$  とした場合の  $Y_N$  の値 ( $y(1)$  の推定値)
  - $\Delta t$  を 0.1 から 0.01 にした場合の誤差の大きさの変化  $\Rightarrow$  各公式の次数を反映している
  - ルンゲ-クッタ法が、計算量の不利を十分カバーするよい結果を与えている

# 5-5 連立1階もしくは2階常微分方程式の 初期値問題

## 連立1階常微分方程式と2階常微分方程式の関係

連立1階常微分方程式の初期値問題 (5.8):

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(t, y_1, y_2), & y_2' &= f_2(t, y_1, y_2) \\ a_1, a_2 &\in \mathbb{R}, & y_1(0) &= a_1, & y_2(0) &= a_2 \end{aligned} \quad (5.55)$$

2階常微分方程式の初期値問題 (5.9):

$$\begin{aligned} y'' &= f(t, y, y') \\ a_1, a_2 &\in \mathbb{R}, & y(0) &= a_1, & y'(0) &= a_2 \end{aligned} \quad (5.56)$$

## 連立1階常微分方程式と2階常微分方程式の関係

2階常微分方程式の初期値問題は連立1階常微分方程式の初期値問題に帰着可能

式 (5.56) の  $y(t), y'(t)$  をそれぞれ  $y_1(t), y_2(t)$  に書き換えると、次の問題と等価になる:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, & y_2' &= f_2(t, y_1, y_2) \\ a_1, a_2 &\in \mathbb{R}, & y_1(0) &= a_1, & y_2(0) &= a_2 \end{aligned} \tag{5.57}$$

## 連立1階常微分方程式と2階常微分方程式の関係

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(t, y_1, y_2), & y_2' &= f_2(t, y_1, y_2) \\ a_1, a_2 &\in \mathbb{R}, & y_1(0) &= a_1, & y_2(0) &= a_2 \end{aligned} \quad (5.55)$$

で、 $f_1(t, y_1, y_2) = y_2, f_2(t, y_1, y_2) = f(t, y, y')$  とおくと、式 (5.56) は式 (5.57) に一致する

⇨ 式 (5.56) は式 (5.57) に変形し、連立1階常微分方程式の初期値問題として解くことにする

# 連立1階常微分方程式の差分法

1階常微分方程式の差分法を応用して解く

- $\Delta t > 0, \quad t_j = j \Delta t$
- $Y_j^{(1)}, Y_j^{(2)}$  : それぞれ微分解  $y_1(t_j), y_2(t_j)$  に対応する  
差分解

# 連立1階常微分方程式の差分法

オイラー法の応用による近似:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta t}(Y_{j+1}^{(1)} - Y_j^{(1)}) &= f_1(t_j, Y_j^{(1)}, Y_j^{(2)}) \\ \frac{1}{\Delta t}(Y_{j+1}^{(2)} - Y_j^{(2)}) &= f_2(t_j, Y_j^{(1)}, Y_j^{(2)}) \\ Y_0^{(1)} &= a_1, \quad Y_0^{(2)} = a_2\end{aligned} \quad (5.58)$$

## 連立1階常微分方程式の差分法

ルンゲ-クッタ法の応用による近似:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta t}(Y_{j+1}^{(1)} - Y_j^{(1)}) &= \frac{1}{6}(k_1^{(1)} + 2k_2^{(1)} + 2k_3^{(1)} + k_4^{(1)}) \\ \frac{1}{\Delta t}(Y_{j+1}^{(2)} - Y_j^{(2)}) &= \frac{1}{6}(k_1^{(2)} + 2k_2^{(2)} + 2k_3^{(2)} + k_4^{(2)}) \\ Y_0^{(1)} = a_1, \quad Y_0^{(2)} = a_2 & \qquad \qquad \qquad (5.59)\end{aligned}$$

# 連立1階常微分方程式の差分法

ここで、 $n = 1, 2$  に対し

$$k_1^{(n)} = f_n(t_j, Y_j^{(1)}, Y_j^{(2)}),$$

$$k_2^{(n)} = f_n\left(t_j + \frac{\Delta t}{2}, Y_j^{(1)} + \frac{\Delta t}{2}k_1^{(1)}, Y_j^{(2)} + \frac{\Delta t}{2}k_1^{(2)}\right),$$

$$k_3^{(n)} = f_n\left(t_j + \frac{\Delta t}{2}, Y_j^{(1)} + \frac{\Delta t}{2}k_2^{(1)}, Y_j^{(2)} + \frac{\Delta t}{2}k_2^{(2)}\right),$$

$$k_4^{(n)} = f_n(t_j + \Delta t, Y_j^{(1)} + \Delta t k_3^{(1)}, Y_j^{(2)} + \Delta t k_3^{(2)})$$

(5.60)

# 連立1階常微分方程式の差分法

$k_i^{(n)}$  は  $Y_j^{(1)}, Y_j^{(2)}$  の値から

$$(k_1^{(1)}, k_1^{(2)}) \rightarrow (k_2^{(1)}, k_2^{(2)}) \rightarrow (k_3^{(1)}, k_3^{(2)}) \rightarrow (k_4^{(1)}, k_4^{(2)})$$

の順に計算する

(ホイン法は省略)

# オイラー法とルンゲ-クッタ法のアルゴリズム

- 今回提示した漸化式を忠実に翻訳した形
- 解を求める時刻の最大値:  $T$
- 解を求める時間の分割数:  $N$
- $\Delta t \leftarrow T/N$

# オイラー法のアルゴリズム

入力:  $y_1' = f_1(t, y_1, y_2), y_2' = f_2(t, y_1, y_2)$ : 微分方程式

$y_1(0) = a_1, y_2(0) = a_2$ : 初期値条件

$T$ : 解を求める時刻,  $N$ : 解を求める時間の分割数

出力:  $Y^{(1)}(T), Y^{(2)}(T)$ :  $t = T$  における微分方程式の解  $y_1, y_2$  の近似値 ( $Y^{(1)}, Y^{(2)}$ : 上の微分方程式を近似した差分方程式 (5.58) の解)

# オイラー法のアルゴリズム

1.  $\Delta t \leftarrow T/N; \quad Y_1 \leftarrow a_1; \quad Y_2 \leftarrow a_2;$
2. for ( $j \in [0..n-1]$ )
  - a.  $t \leftarrow j \Delta t;$
  - b.  $\text{new\_}Y^{(1)} \leftarrow Y^{(1)} + \Delta t f_1(t, Y^{(1)}, Y^{(2)});$
  - c.  $\text{new\_}Y^{(2)} \leftarrow Y^{(2)} + \Delta t f_2(t, Y^{(1)}, Y^{(2)});$
  - d.  $Y^{(1)} \leftarrow \text{new\_}Y^{(1)}; \quad Y^{(2)} \leftarrow \text{new\_}Y^{(2)};$
3. return  $Y^{(1)}, Y^{(2)};$

# ルンゲ-クッタ法のアルゴリズム

入力:  $y_1' = f_1(t, y_1, y_2), y_2' = f_2(t, y_1, y_2)$ : 微分方程式

$y_1(0) = a_1, y_2(0) = a_2$ : 初期値条件

$T$ : 解を求める時刻,  $N$ : 解を求める時間の分割数

出力:  $Y^{(1)}(T), Y^{(2)}(T)$ :  $t = T$  における微分方程式の解  $y_1, y_2$  の近似値 ( $Y^{(1)}, Y^{(2)}$ : 上の微分方程式を近似した差分方程式 (5.58) の解)

# ルンゲ-クッタ法のアルゴリズム

1.  $\Delta t \leftarrow T/N; Y_1 \leftarrow a_1; Y_2 \leftarrow a_2;$
2. for ( $j \in [0..n-1]$ )
  - a.  $t \leftarrow j \Delta t;$
  - b.  $k_1^{(1)} \leftarrow f_1(t, Y^{(1)}, Y^{(2)});$
  - c.  $k_1^{(2)} \leftarrow f_2(t, Y^{(1)}, Y^{(2)});$
  - d.  $k_2^{(1)} \leftarrow f_1(t + (\Delta t/2), Y^{(1)} + (\Delta t/2)k_1^{(1)}, Y^{(2)} + (\Delta t/2)k_1^{(2)});$
  - e.  $k_2^{(2)} \leftarrow f_2(t + (\Delta t/2), Y^{(1)} + (\Delta t/2)k_1^{(1)}, Y^{(2)} + (\Delta t/2)k_1^{(2)});$

# ルンゲ-クッタ法のアルゴリズム

## 2. (つづき)

$$f. k_3^{(1)} \leftarrow f_1(t + (\Delta t/2), Y^{(1)} + (\Delta t/2)k_2^{(1)}, Y^{(2)} + (\Delta t/2)k_2^{(2)});$$

$$g. k_3^{(2)} \leftarrow f_2(t + (\Delta t/2), Y^{(1)} + (\Delta t/2)k_2^{(1)}, Y^{(2)} + (\Delta t/2)k_2^{(2)});$$

$$h. k_4^{(1)} \leftarrow f_1(t + \Delta t, Y^{(1)} + \Delta t k_3^{(1)}, Y^{(2)} + \Delta t k_3^{(2)});$$

$$i. k_4^{(2)} \leftarrow f_2(t + \Delta t, Y^{(1)} + \Delta t k_3^{(1)}, Y^{(2)} + \Delta t k_3^{(2)});$$

$$j. Y^{(1)} \leftarrow Y^{(1)} + (\Delta t/6)(k_1^{(1)} + 2k_2^{(1)} + 2k_3^{(1)} + k_4^{(1)});$$

$$k. Y^{(2)} \leftarrow Y^{(2)} + (\Delta t/6)(k_1^{(2)} + 2k_2^{(2)} + 2k_3^{(2)} + k_4^{(2)});$$

## 3. return $Y^{(1)}, Y^{(2)}$ ;

## 単振動の計算例

単振動の初期値問題:

$$y'' = -y, \quad y(0) = 1, \quad y''(0) = 0 \quad (5.17)$$

[解]  $y(t) = \cos(t)$

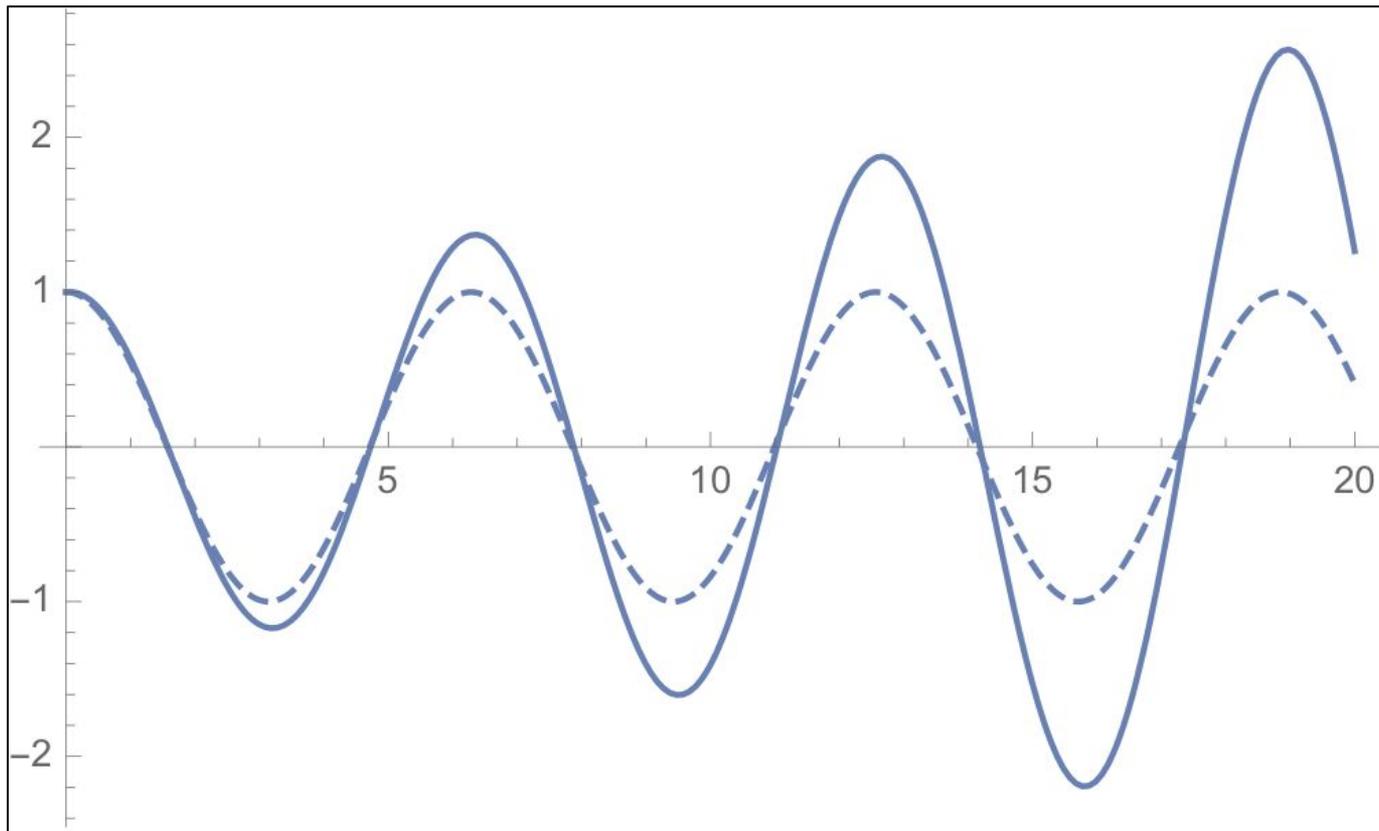
$y_1(t) = y(t)$ ,  $y_2(t) = y'(t)$  とおくことで、連立1階常微分方程式

$$y_1' = y_2, \quad y_2' = -y_1, \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 0 \quad (5.61)$$

に帰着する

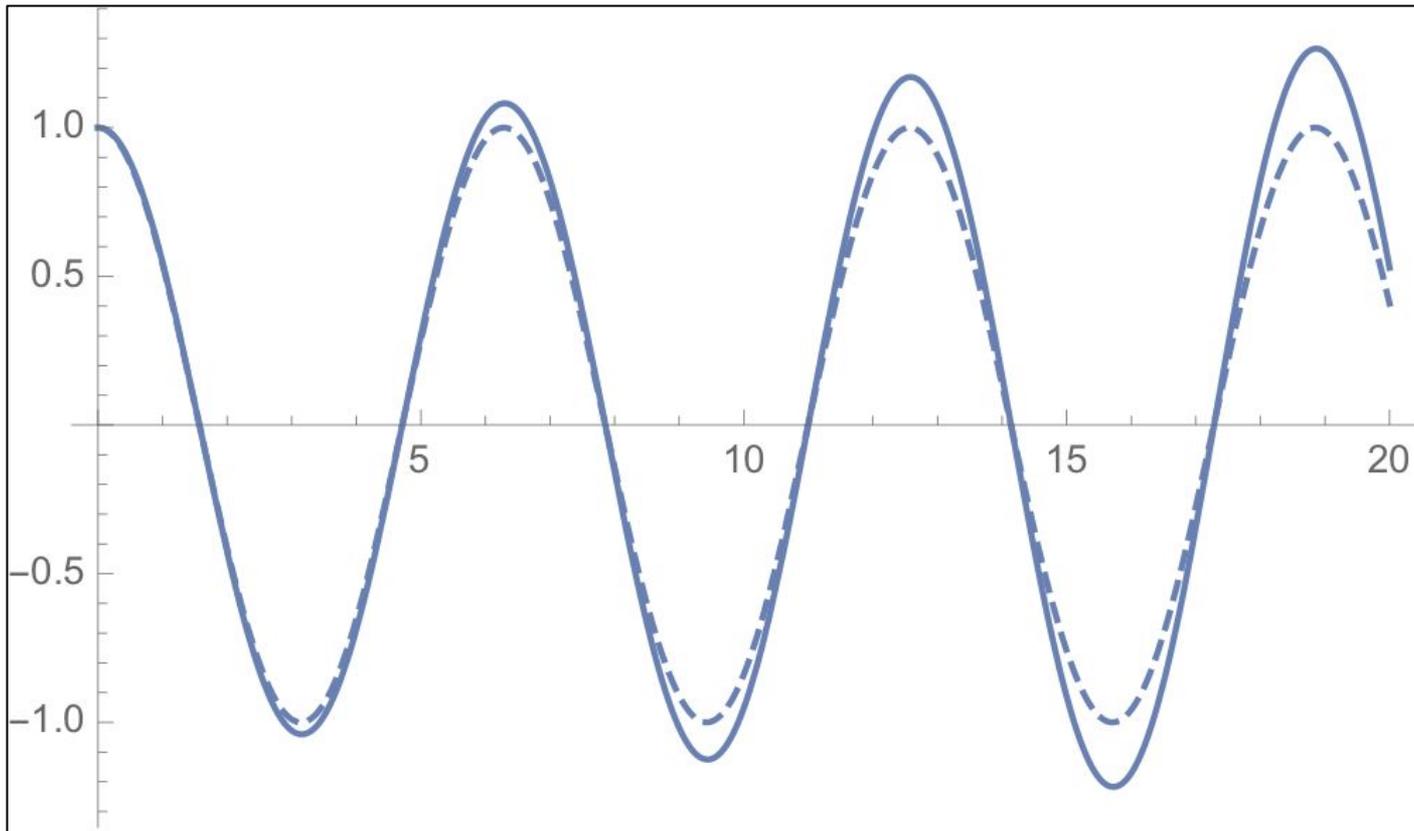
# 単振動の計算例

オイラー法による差分解 (実線,  $\Delta t = 0.1$ ) と微分解 (破線)



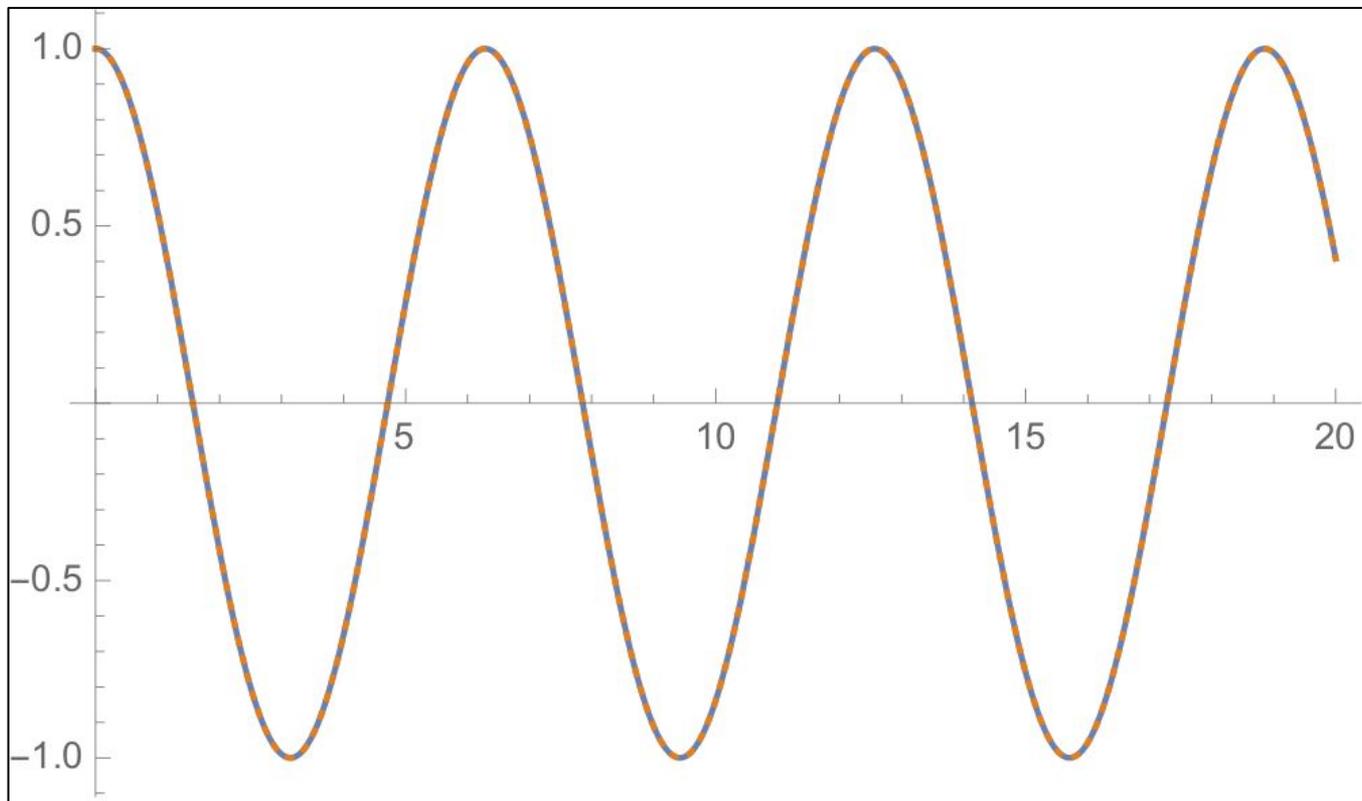
# 単振動の計算例

オイラー法による差分解 (実線,  $\Delta t = 0.025$ ) と微分解 (破線)



# 単振動の計算例

ルンゲ-クッタ法による差分解 (実線,  $\Delta t = 0.2$ ) と微分解 (破線)



# 単振動の計算例

教訓：

ある方法の1回だけの数値計算から結論を導くのは  
危険

## 減衰振動の計算例

減衰振動の初期値問題:  $k = 5, \omega = 4$

$$y'' + 10 y' + 16 y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad (5.62)$$

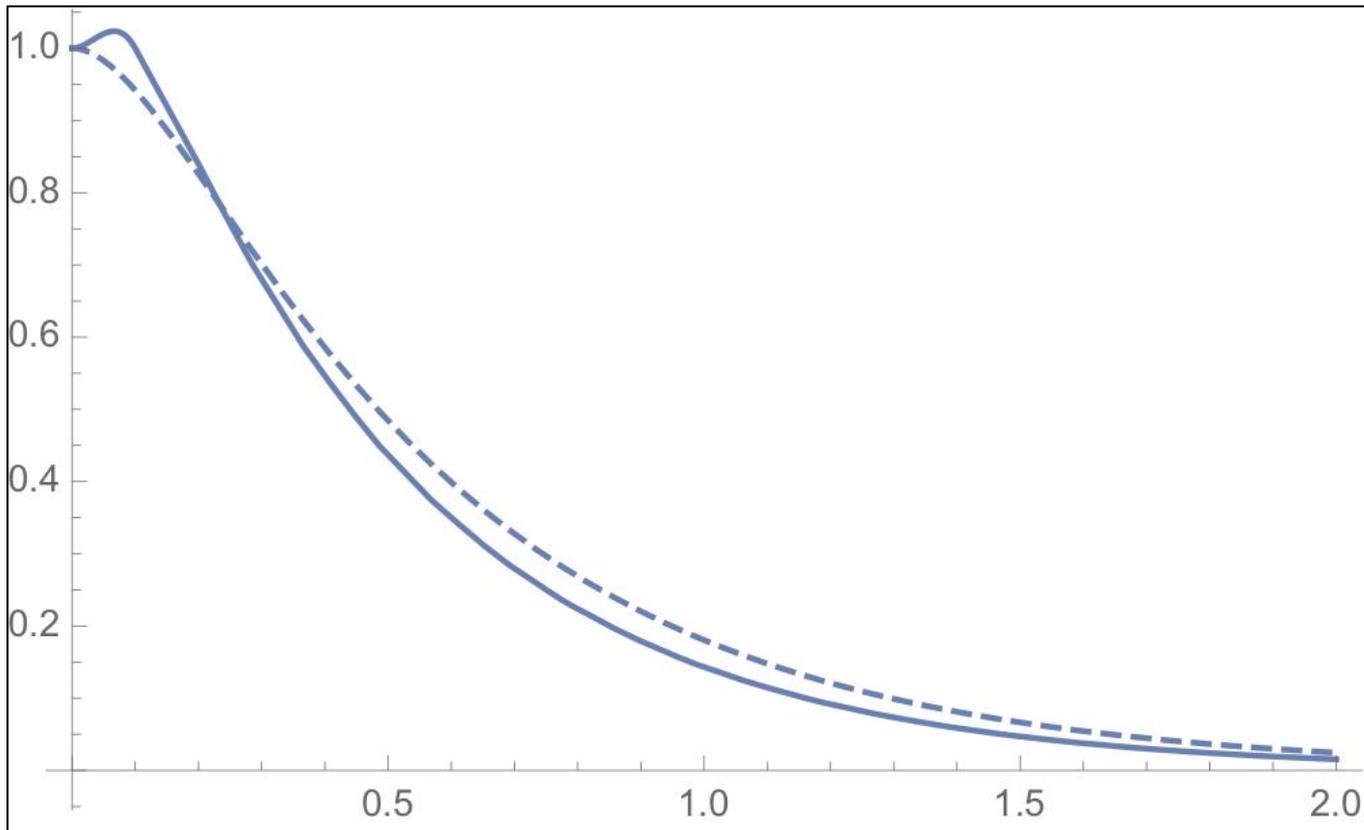
[解]  $y(t) = (1/3) \{4 \exp(-2t) - \exp(-8t)\}$  (5.64)

$y_1(t) = y(t), y_2(t) = y'(t)$  とおくことで、連立1階常微分方程式に帰着する

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, & y_2' &= -16 y_1 - 10 y_2, \\ y_1(0) &= 1, & y_2(0) &= 0 \end{aligned} \quad (5.63)$$

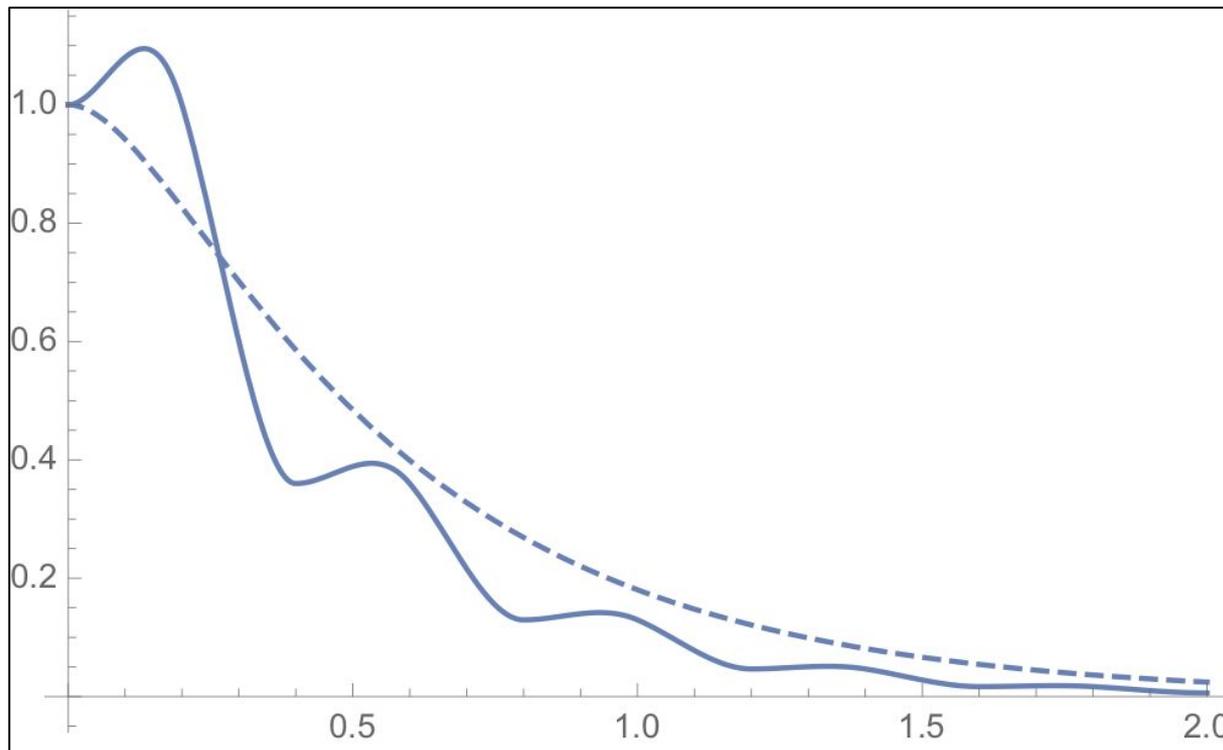
# 減衰振動の計算例

オイラー法による差分解 (実線,  $\Delta t = 0.1$ ) と微分解 (破線)



# 減衰振動の計算例

オイラー法による差分解を補間した関数 (実線,  $\Delta t = 0.2$ ) と微分解 (破線)



# 計算の不安定性

- 減衰振動の初期値問題 (5.62) の差分解を求める際、 $\Delta t$  を大きくすると解の精度が極端に落ちた。  
なぜ？
- そこで、オイラー法の差分解を具体的に式で求めてみよう

## 計算の不安定性

式 (5.58) において

$$f_1(t, y_1, y_2) = y_2, \quad f_2(t, y_1, y_2) = -16y_1 - 10y_2$$

を代入し、初期条件として  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 0$  とすると次の  
差分方程式の初期値問題を得る:

## 計算の不安定性

$$Y_{j+1}^{(1)} = Y_j^{(1)} + \Delta t Y_j^{(2)},$$

$$Y_{j+1}^{(2)} = -16 \Delta t Y_j^{(1)} + (1 - 10 \Delta t) Y_j^{(2)}, \quad (5.65)$$

$$Y_0^{(1)} = 1, Y_0^{(2)} = 0$$

方程式 (5.65) を解くと

$$Y_j^{(1)} = (1/3)\{4(1 - 2\Delta t)^j - (1 - 8\Delta t)^j\} \quad (5.66)$$

$\Delta t \rightarrow 0$  のとき、差分解 (5.66) は微分解 (5.64) に収束する

## 計算の不安定性

$$Y_j^{(1)} = (1/3)\{4(1 - 2\Delta t)^j - (1 - 8\Delta t)^j\} \quad (5.66)$$

ところが、 $0 < \Delta t < \infty$  に対し、 $j \rightarrow \infty$  のとき

$$(1 - 2\Delta t)^j \rightarrow 0 \text{ かつ } (1 - 8\Delta t)^j \rightarrow 0$$

を満たすためには

$$|1 - 2\Delta t| < 1 \text{ かつ } |1 - 8\Delta t| < 1$$

を満たさなければならない  $\Rightarrow \Delta t < 1/4$

## 計算の不安定性

$$Y_j^{(1)} = (1/3)\{4(1 - 2\Delta t)^j - (1 - 8\Delta t)^j\} \quad (5.66)$$

- $\Delta t > 1/4$  の場合:  $|1 - 8\Delta t| > 1$  より、 $Y_j^{(1)}$  は振動しながら絶対値が増加する
- $1/8 < \Delta t < 1/4$  の場合:  $-1 < 1 - 8\Delta t < 0$  より、 $Y_j^{(1)}$  は振動しながら絶対値が減少する(微分解のように滑らかに減少しない)

⇒ 差分法における計算の**不安定性** (instability)

## 差分解の精度を検討するためのヒント

1. 計算結果が得られたら、結果の数値データの表をグラフにする
2. 微分解を書き下すことができない場合も、微分解の性質をできるだけ調べておき、差分解がその性質をどれだけ満足しているかを調べる

## 差分解の精度を検討するためのヒント

3. 計算結果が途中で発散したり、異常に振動したりしていないか？
4.  $\Delta t$  の大きさを変えたり、別の方法を適用したりして、計算結果がどのように変化するかを調べる
5.  $\Delta t$  が小さければ小さい程よいわけでもない ( $\Delta t$  が小さすぎると丸め誤差の影響を受けやすくなる)

## 5-6 2階常微分方程式の境界値問題

# 連立常微分方程式の境界値問題

2階常微分方程式の境界値問題 (5.10):

$$y'' = f(x, y, y') \quad (5.67a)$$

$$a_1, a_2 \in \mathbb{R}, y(0) = a_1, \quad y(1) = a_2 \quad (5.67b)$$

## 連立常微分方程式の境界値問題

ここでは、次章の偏微分方程式の解法の準備を兼ねて、線形常微分方程式の境界値問題

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x) \quad (5.68a)$$

$$a_1, a_2 \in \mathbb{R}, y(0) = a_1, \quad y(1) = a_2 \quad (5.68b)$$

を解くための数値計算法について議論する

$$p(x), q(x), r(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

## 差分方程式による近似

- 解を求める区間の分割数:  $N$
- 格子点の間隔:  $\Delta x \leftarrow 1/N$
- $x_j = j \Delta x$

微分方程式 (5.68a) を差分方程式で近似すると

$$\frac{Y_{j+1} - 2Y_j + Y_{j-1}}{(\Delta x)^2} = p_j \frac{Y_{j+1} - Y_{j-1}}{2\Delta x} + q_j Y_j + r_j \quad (5.69)$$
$$p_j = p(x_j), q_j = q(x_j), r_j = r(x_j)$$

## 差分方程式による近似

式 (5.69) の両辺に  $(\Delta x)^2$  をかけて整理すると

$$-\left(1 + \frac{\Delta x}{2} p_j\right) Y_{j-1} + (2 + (\Delta x)^2 q_j) Y_j - \left(1 - \frac{\Delta x}{2} p_j\right) Y_{j+1} = -(\Delta x)^2 r_j$$

(5.70)

## 差分方程式による近似

$$-\left(1 + \frac{\Delta x}{2} p_j\right) Y_{j-1} + (2 + (\Delta x)^2 q_j) Y_j - \left(1 - \frac{\Delta x}{2} p_j\right) Y_{j+1} = -(\Delta x)^2 r_j \quad (5.70)$$

ここで

$$\alpha_j = 2 + (\Delta x)^2 q_j,$$

$$\beta_j = -\left(1 + \frac{\Delta x}{2} p_j\right),$$

$$\gamma_j = -\left(1 - \frac{\Delta x}{2} p_j\right),$$

$$d_j = -(\Delta x)^2 r_j$$

とおくと

$$\beta Y_{j-1} + \alpha Y_j + \gamma Y_{j+1} = d_j \quad (1 \leq j \leq n-1) \quad (5.71)$$

## 差分方程式による近似

式 (5.71) を  $j = 1, 2, \dots, N - 1$  に対して書き下し、整理すると

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & & & & \\ \beta_2 & \alpha_2 & \gamma_2 & & & \\ & \beta_3 & \alpha_3 & \gamma_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \beta_{N-2} & \alpha_{N-2} & \gamma_{N-2} \\ & & & & \beta_{N-1} & \alpha_{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_{N-2} \\ Y_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 - \beta_1 Y_0 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{N-2} \\ d_{N-1} - \gamma_{N-1} Y_N \end{pmatrix} \quad (5.73)$$

$Y_0, Y_N$  は境界条件からそれぞれ  $Y_0 = a_1, Y_N = a_2$

## 差分方程式による近似

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & & & & \\ \beta_2 & \alpha_2 & \gamma_2 & & & \\ & \beta_3 & \alpha_3 & \gamma_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \beta_{N-2} & \alpha_{N-2} & \gamma_{N-2} \\ & & & & \beta_{N-1} & \alpha_{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_{N-2} \\ Y_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 - \beta_1 Y_0 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{N-2} \\ d_{N-1} - \gamma_{N-1} Y_N \end{pmatrix} \quad (5.73)$$

- 式 (5.73) は3重対角行列のLU分解によって解ける
- 解が一意に存在するための条件:

例: すべての  $j$  に対し  $|p_j| < 2/\Delta x$ ,  $q_j \geq 0$

# 境界値問題のアルゴリズム

入力:  $y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x)$ : 微分方程式 (5.68)

$y(0) = a_1, y(1) = a_2$ : 境界値条件

$N$ : 区間  $[0, 1]$  の分割数

出力:  $Y_1, \dots, Y_{N-1}$ : 微分方程式 (5.68) の差分解

# 境界値問題のアルゴリズム

1.  $\Delta x \leftarrow 1/N; \quad Y_0 \leftarrow a_1; \quad Y_N \leftarrow a_2;$

2. for ( $j \in [1..N-1]$ )

a.  $\alpha_j = 2 + (\Delta x)^2 q_j, \quad \beta_j = - \left( 1 + \frac{\Delta x}{2} p_j \right),$

$$\gamma_j = - \left( 1 - \frac{\Delta x}{2} p_j \right), \quad d_j = -(\Delta x)^2 r_j$$

3. 連立1次方程式 (5.73) を解く;

4. return ( $Y_1, \dots, Y_{N-1}$ );

## 境界値問題の計算例

梁のたわみの問題 (5.20)

$$y'' = x(1 - x), \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.1$$

(5.74)

[解]

$$y(x) = -\frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} + \frac{x}{60}$$

図 5-20:  $N = 20, \Delta x = 0.05$  の場合の差分解

## 第5章のまとめ

- 常微分方程式の定義と問題の分類
- 常微分方程式の例題と解法（オイラー法、ホイン法、ルンゲ-クッタ法）
- 常微分方程式の計算例
- 計算の不安定性と対策

# 次回の内容

- 第6章: 偏微分方程式
  - 6-1: 偏微分方程式
  - 6-2: 拡散方程式
  - 6-3: 陰公式
  - 6-4: 波動方程式
  - 6-5: ラプラス方程式