計算機数学II (2018)
5: 常微分方程式

照井 章（筑波大学 数理物質系 数学域）
Akira Terui (Institute of Mathematics, University of Tsukuba)

第5章の内容

- 常微分方程式の定義
- 常微分方程式の問題の分類
- 常微分方程式の実例
- 差分商、差分方程式
- 常微分方程式の解法

  （オイラー法、ホイン法、ルンゲ-クッタ法）

5-1 常微分方程式

常微分方程式

- $y(t)$: R → R, $y'(t)$: y の1階導関数
- t, y, y' を含む方程式:

$$y' = (1 - t)\, y \tag{5.1}$$

- 微分方程式 (differential equation):
  従属変数 y の導関数 y' を含む方程式
- 常微分方程式 (ordinary differential equation, ODE): 独立変数が1つ (t) だけの微分方程式

常微分方程式 (5.1) の解法

1. 式 (5.1) の両辺を y で割る:

$$(y'/y) = 1 - t \tag{5.2}$$

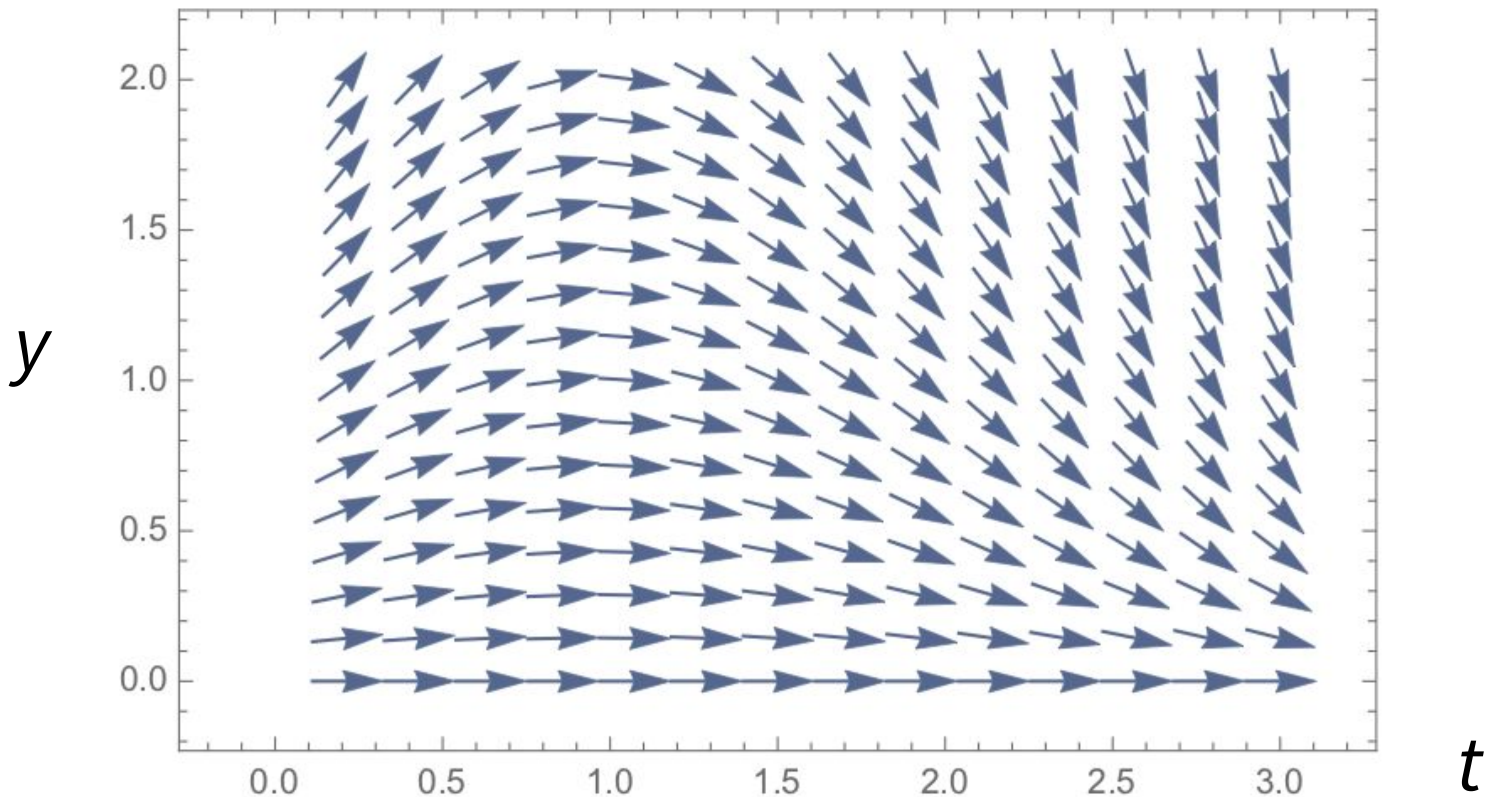
2. 両辺を t で積分する:

$$\log|y| = (-1/2)(1 - t)^2 + C, \quad C\text{: 積分定数} \tag{5.3}$$

3. 解: $y = A \exp((-1/2)(1 - t)^2)$, A: 任意定数 (5.4)

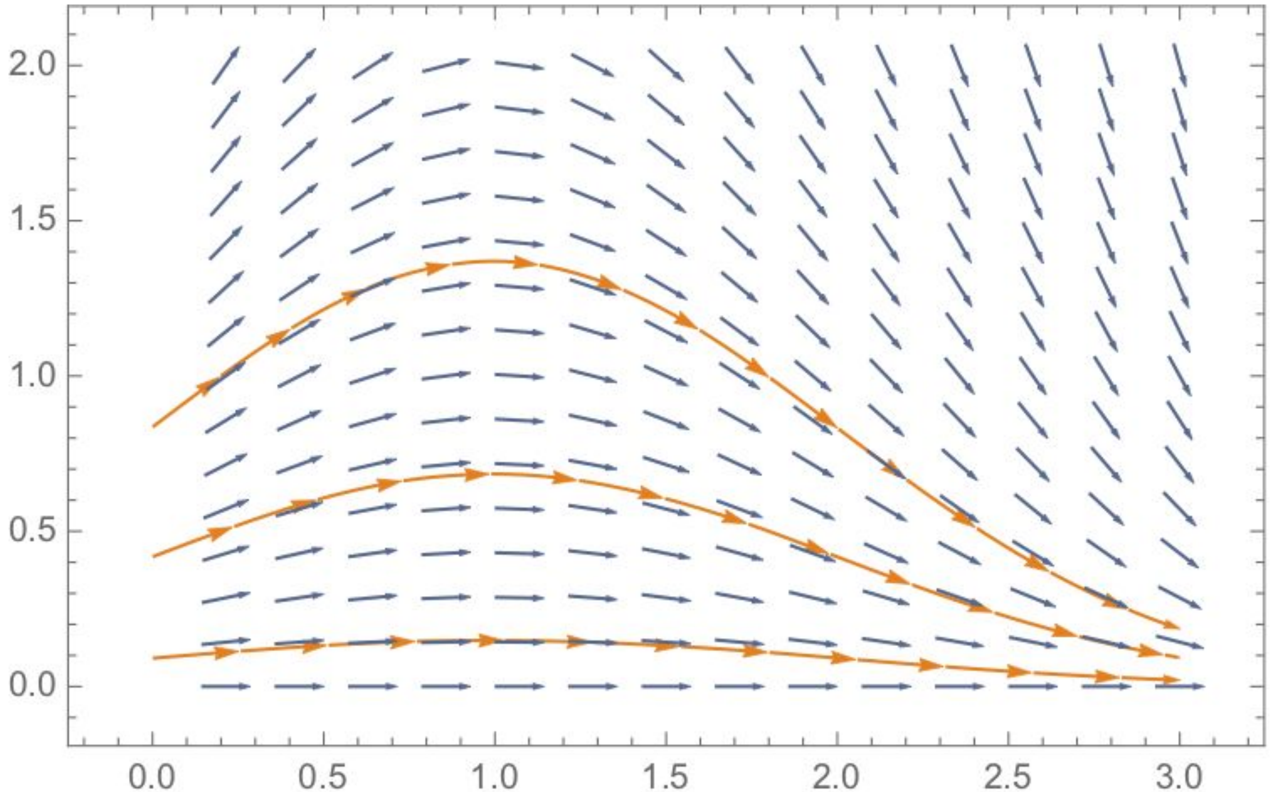
常微分方程式 (5.1) の解の意味

微分方程式 (5.1) によって解の接線が定まる



常微分方程式 (5.1) の解の意味

$y(0)$ の値（初期値）によって解 $y(t)$ が定まる



y

t

常微分方程式 (5.1) の解を一意に定める

1. $t = 0$ での y の値を定める:

$$y(0) = 1 \tag{5.5}$$

2. すると、式 (5.4) からAの値が確定:

$$A = \sqrt{e} \tag{5.6}$$

3. 解が一意に定まる: $y = \exp(t - t^2/2)$

常微分方程式 (5.1) の解を一意に定める

1. $t=0$ での y の値を定める:

   初期条件 (initial condition)

2. すると、式 (5.4) からAの値が確定:

3. 解が一意に定まる

   ⇒常微分方程式を初期条件の下で解く

常微分方程式の初期値問題
(initial value problem)

常微分方程式の問題の分類

本授業で扱う常微分方程式:

- 1階常微分方程式の初期値問題
- 連立1階常微分方程式の初期値問題
- 2階常微分方程式
    - 初期値問題 (initial value problem)
    - 境界値問題 (boundary value problem)

1階常微分方程式の初期値問題

$f(u, v)$: 関数, $y = y(t)$

$$y' = f(t, y) \tag{5.7a}$$

$$y(0) = a \tag{5.7b}$$

$a \in \mathrm{R}$, $y(t)$ は $t > 0$ の範囲で求める

1階常微分方程式 (5.7a) を初期条件 (5.7b) の下で解く初期値問題

連立1階常微分方程式の初期値問題

$f_1(u, v, w), f_2(u, v, w)$: 関数, $y_1 = y_1(t), y_2 = y_2(t)$

$$y_1' = f_1(t, y_1, y_2) \tag{5.8a}$$

$$y_2' = f_2(t, y_1, y_2) \tag{5.8b}$$

$$a_1, a_2 \in \mathrm{R}, \quad y_1(0) = a_1, \quad y_2(0) = a_2 \tag{5.8c}$$

連立1階常微分方程式 (5.8a), (5.8b) を初期条件 (5.8c) の下で解く初期値問題

2階常微分方程式の初期値問題

$f(u, v, w)$: 関数, $y = y(t)$

$$y'' = f(t, y, y') \tag{5.9a}$$

$$a_1, a_2 \in \mathrm{R},\ y(0) = a_1, \quad y'(0) = a_2 \tag{5.9b}$$

2階常微分方程式 (5.9a) を初期条件 (5.9b) の下で解く初期値問題

2階常微分方程式の境界値問題

$f(u, v, w)$: 関数, $y = y(t)$, $0 < t < 1$

$$y'' = f(t, y, y') \quad (5.10a)$$

$$a_1, a_2 \in \mathrm{R},\ y(0) = a_1, \quad y(1) = a_2 \quad (5.10b)$$

2階常微分方程式 (5.10a) を境界条件 (boundary condition) (5.10b) の下で解く境界値問題

常微分方程式の問題の実例

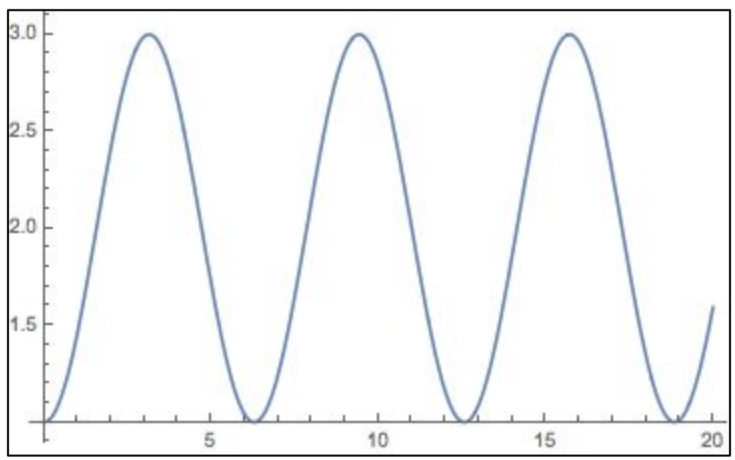
- 1階常微分方程式の初期値問題
- 変数係数常微分方程式
- 2階常微分方程式の初期値問題
- 連立1階常微分方程式の初期値問題
- 2階常微分方程式の境界値問題

1階常微分方程式の初期値問題：積分

$$y' = \sin(t) \quad (5.13a)$$

$$y(0) = 1 \quad (5.13b)$$

[解] $$y(t) = \int_0^t \sin t \, dt + y(0) = 2 - \cos t$$



1階常微分方程式の初期値問題: 生物の増殖

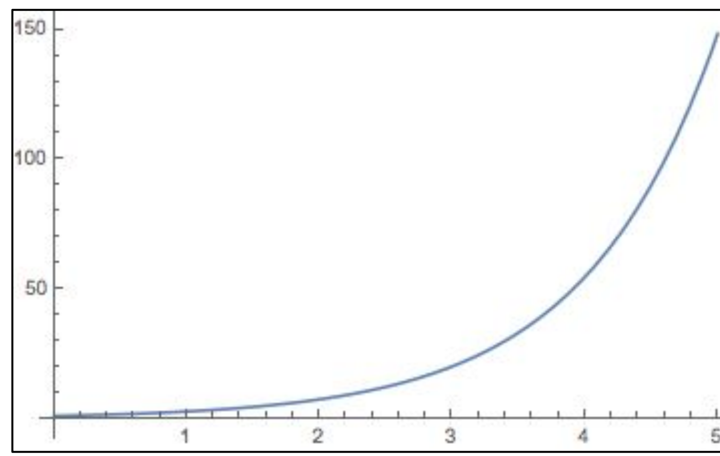
ある生物が理想的な環境下で増殖するモデル

時刻 t での生物の個体数: $y(t)$, 時刻0での個体数: 1

$y' = y$ (5.14a)

$y(0) = 1$ (5.14b)

[解] $y(t) = \exp(t)$



1階常微分方程式の初期値問題: 増殖に上限がある生物

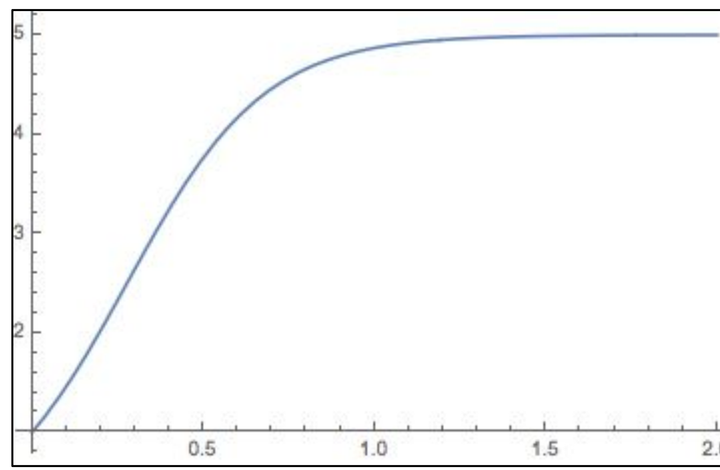
ある程度以上は増殖できないモデル

時刻 t での生物の個体数: $y(t)$, 時刻0での個体数: 1

$y' = y(5 - y)$ (5.15a)

$y(0) = 1$ (5.15b)

[解] $$y(t) = \frac{5}{1 + 4\exp(-5t)}$$



変数係数常微分方程式

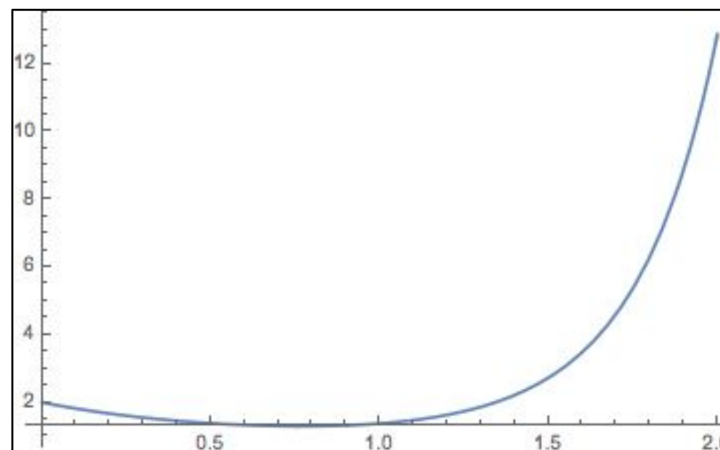
常微分方程式の係数が独立変数に依存する問題

物性値が時間（場所）に依存する場合など

$y' = 2\,t\,y - 2$ (5.16a)

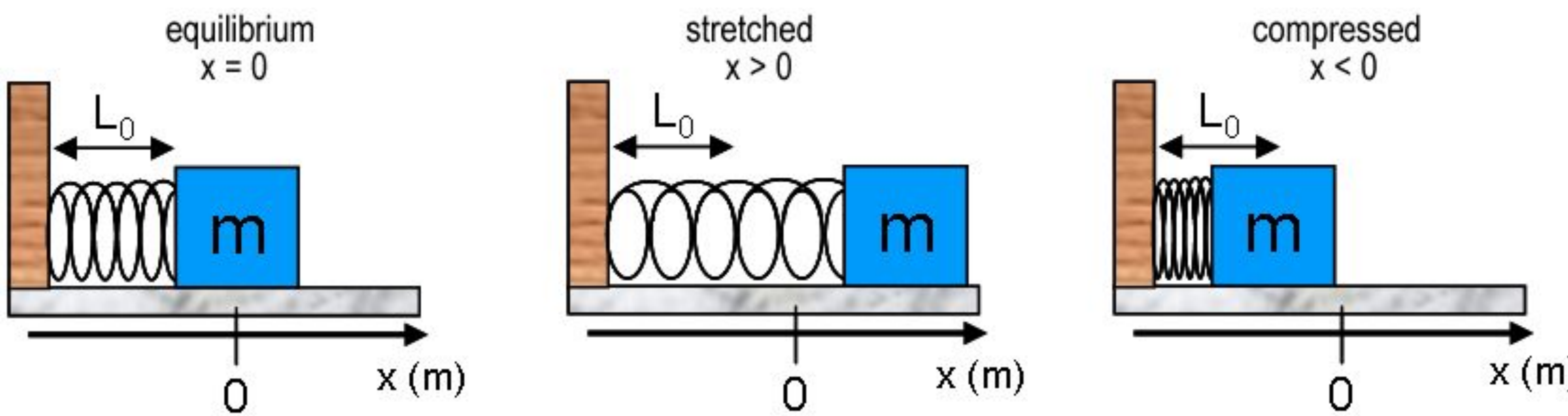
$y(0) = 2$ (5.16b)

[解] $y(t) = \left(2 - 2\int_0^t e^{-s^2} ds\right) e^{t^2}$



2階常微分方程式の初期値問題: 単振動

- 壁の一端に固定されたバネの他端におもりが取り付けられている
- おもりを少し引っ張ってから手を離す



Mechanics: The Study of Motion (CC BY 3.0 US)

2階常微分方程式の初期値問題: 単振動

時刻 t でのおもりのつりあいの位置からのずれ: $y(t)$

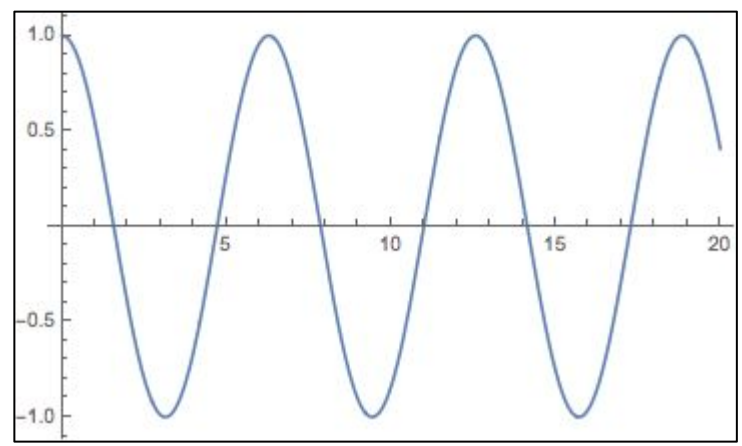
時刻0でのおもりの位置: $y(0) = 1$

時刻0でのおもりの速度: $y'(0) = 0$

$y'' = - y$ (5.17a)

$y(0) = 1, y''(0) = 0$ (5.17b)

[解]　$y(t) = \cos(t)$



2階常微分方程式の初期値問題: 減衰振動

先の単振動ではおもりに働く力はバネによる復元力のみ

これに、おもりの速度 y' に比例する抵抗が加わる場合

$$y'' + 2k\, y' + \omega^2 y = 0 \qquad (5.18a)$$

$$y(0) = 1,\; y'(0) = 0 \qquad (5.18b)$$

(k: 抵抗力, ω: 復元力 を表す定数)

2階常微分方程式の初期値問題: 減衰振動

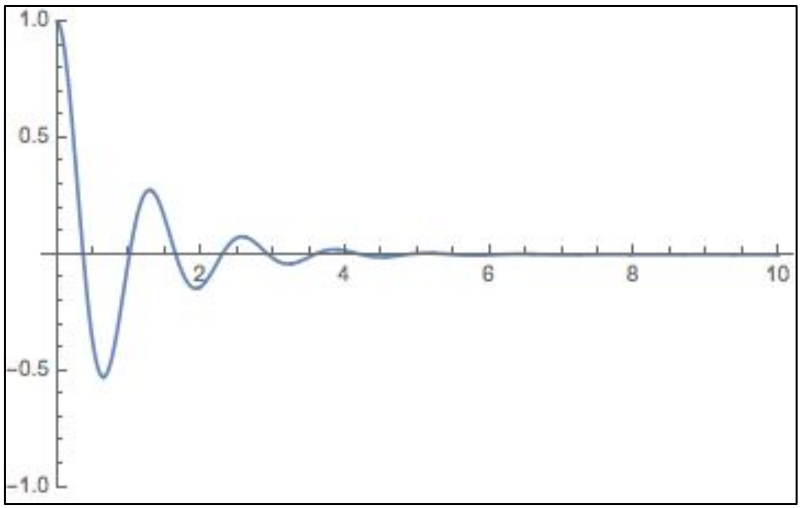
[解] (i) $k < \omega$ (抵抗力が小さいとき):

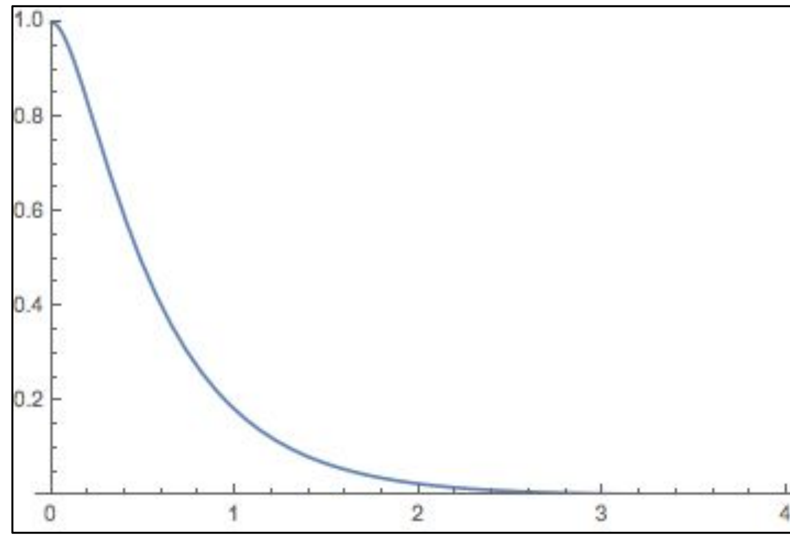
$$y(t) = \exp(-kt)\left\{\cos(\sqrt{\omega^2 - k^2}t) + \frac{k}{\omega^2 - k^2}\sin(\sqrt{\omega^2 - k^2}t)\right\}$$

(ii) $k > \omega$ (抵抗力が大きいとき; 過減衰):

$$\begin{aligned} y(t) = \frac{1}{2}\Biggl\{ & \left(\frac{k}{\sqrt{k^2 - \omega^2}} + 1\right)\exp(-(k - \sqrt{k^2 - \omega^2})t) \\ & - \left(\frac{k}{\sqrt{k^2 - \omega^2}} - 1\right)\exp(-(k + \sqrt{k^2 - \omega^2})t)\Biggr\} \end{aligned}$$

2階常微分方程式の初期値問題: 減衰振動





$k < \omega$ の場合 ($k = 1, \omega = 5$)

$k > \omega$ の場合 ($k = 5, \omega = 4$)

連立1階常微分方程式の初期値問題:

餌の生物とそれを食べる生物の関係

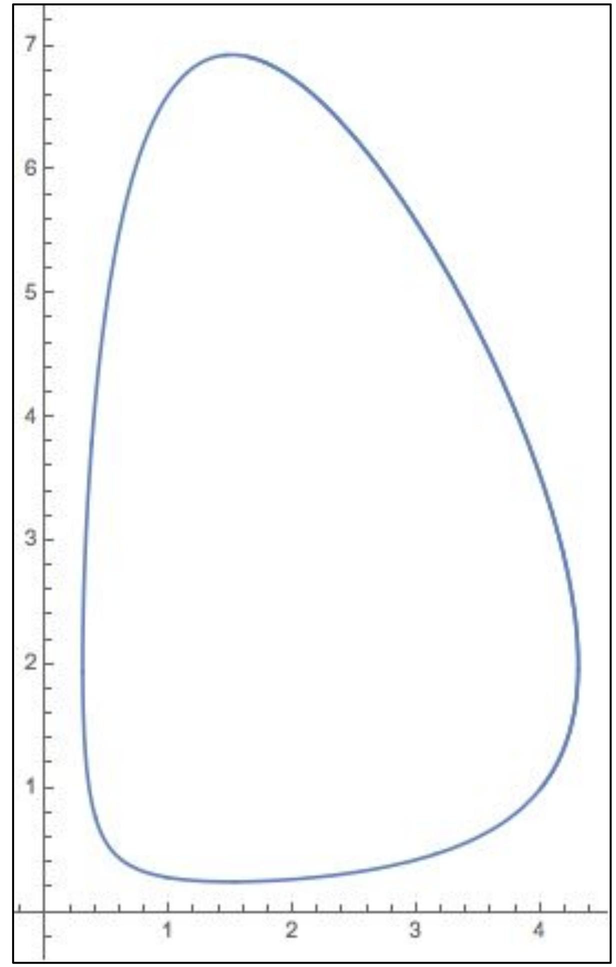
- 2種類の生物の集団: 生物1、生物2
- 生物2は生物1を食べて生きている
- 生物2は生物1を食べて増殖し、生物1が少ないと減少する
- 生物1は生物2が少ないと増殖し、多いと減少する

連立1階常微分方程式の初期値問題:

$y_1' = (2 - y_2)\, y_1$ (5.19a)

$y_2' = (2\, y_1 - 3)\, y_2$ (5.19b)

$y_1(0) = 4,\ y_2(0) = 1$ (5.19c)



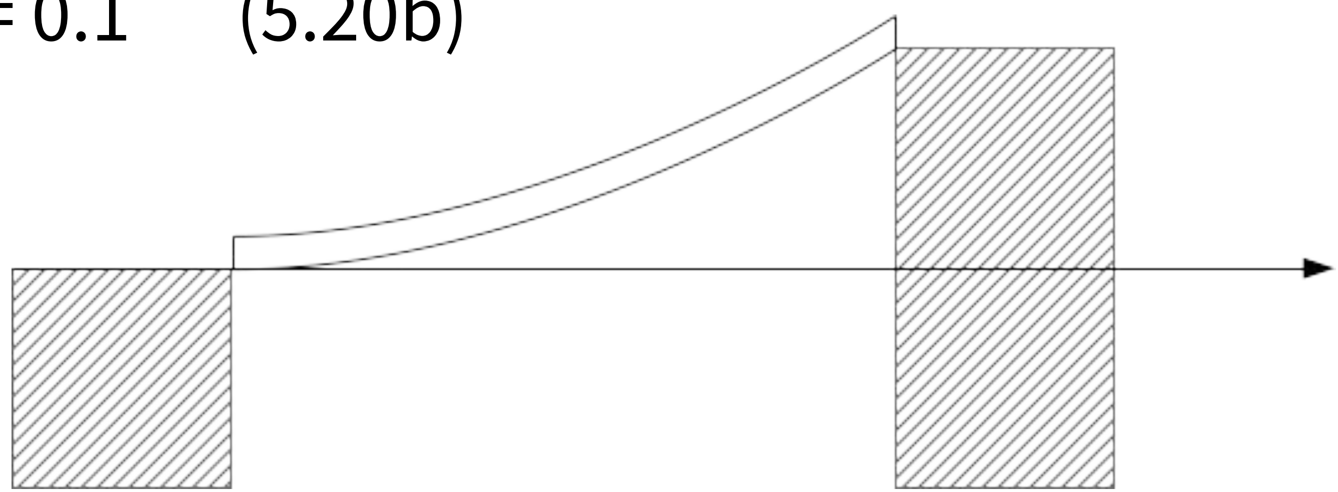
2階常微分方程式の境界値問題: 梁のたわみ

梁の左端: $x = 0$, 高さ 0

梁の右端: $x = 1$, 高さ 0.1

$y'' = x\,(1 - x)$ (5.20a)

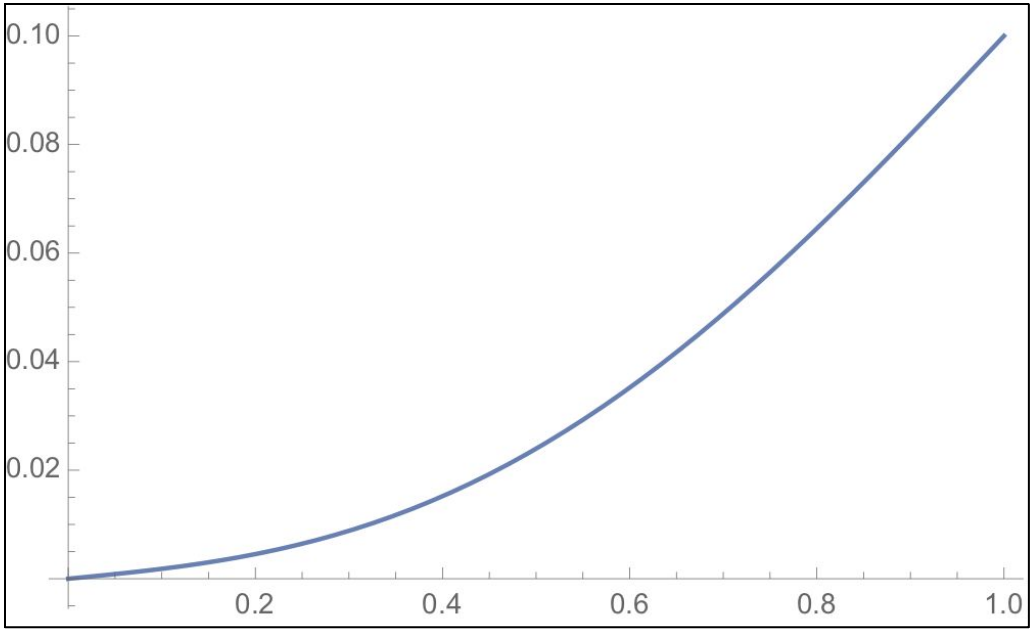
$y(0) = 0, y(1) = 0.1$ (5.20b)



2階常微分方程式の境界値問題: 梁のたわみ

[解]

$$y(x) = -\frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} + \frac{x}{60}$$



5-2 微分と差分

微分係数

$f(x)$: R → R

$f(x)$ の $x = a$ における微分係数 (differential coefficient)

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\{f(a+h) - f(a)\} \tag{5.21}$$

$f'(a)$ 等の記号で表される

微分係数の例

$f(x) = x^2,\ a = 1$

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \{(1+h)^2 - 1\} = \lim_{h \to 0} (2+h) = 2 \tag{5.22}$$

微分係数の例

$f(x) = \sin(x), \quad a = 1$

$$
\begin{aligned}
f'(1) &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \{\sin(1+h) - \sin(1)\} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2}{h} \cos\left(1 + \frac{h}{2}\right) \sin\left(\frac{h}{2}\right) \\
&= \cos(1) = 0.540302 \cdots
\end{aligned}
\tag{5.23}
$$

(with $\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A+B}{2}$, $\lim_{x \to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$)

極限値への収束

h を 0 に近づけたとき、

$$\frac{1}{h}\{f(a+h)-f(a)\}$$

はどのように微分係数 $f'(a)$ に近づいていくか？

極限値への収束

sin(x) の x = 1 における計算例 (表 5.1):

$$D = \frac{1}{h}\{\sin(1+h) - \sin(1)\} \tag{5.24}$$

- h の絶対値を小さくするとDが $f'(1)$ に近づく
- $h = \pm 1.0 \times 10^{-5}$ で精度 5 桁程度で真値と一致
- しかし、h を過小にすると桁落ちの影響で精度が落ちる (☞ demo)

微分係数の近似値の誤差

$f(x)$ の値が計算できれば、それらに対する有限回の四則演算のみで微分係数の近似値を求めることが可能

微分係数の近似値の誤差

- 任意の関数 $f(x)$, 実数 a に対し

$$D = \frac{1}{h}\{f(a+h) - f(a)\} \qquad (5.25)$$

が $f'(a)$ に近く様子を調べる

- Taylorの公式 (1.16b) より

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(\xi) \quad (a < \xi < a+h) \qquad (5.26)$$

微分係数の近似値の誤差

- 式 (5.26) を (5.25) に代入し、整理すると

$$D - f'(a) = \frac{h}{2} f''(\xi) \qquad (5.27)$$

（Dと$f'(a)$のとの誤差）

- $x = a$の近傍で $|f''(\xi)| < \infty$ とすると、$h \to 0$ のとき

$$D - f'(a) = O(h) \qquad (5.28)$$

- h: 十分小のとき、D の $f'(a)$ に対する誤差はほぼ h に比例する

差分商

- **差分近似** (difference approximation):
  関数のいくつかの点における値の差を用いて微分係数を近似すること
- **差分商** (difference quotient):
  式 (5.25) のような差分近似の式による量

$$D = \frac{1}{h}\{f(a+h) - f(a)\}$$

1階差分商: 1階微分係数を近似する差分商

$\Delta x > 0$ のとき、$x = a$ における

- 前進差分商 (forward difference quotient)

$$\frac{1}{\Delta x}\{f(a+\Delta x) - f(a)\} \tag{5.29}$$

- 後退差分商 (badkward difference quotient)

$$\frac{1}{\Delta x}\{f(a) - f(a-\Delta x)\} \tag{5.30}$$

1階差分商: 1階微分係数を近似する差分商

$\Delta x > 0$ のとき、$x = a$ における

- 中心差分商 (central difference quotient)

$$\frac{1}{\Delta x}\left\{f\left(a+\frac{\Delta x}{2}\right)-f\left(a-\frac{\Delta x}{2}\right)\right\} \quad (5.31)$$

1階差分商: 中心差分商の誤差評価

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\Delta x}\left\{f\left(a+\frac{\Delta x}{2}\right)-f\left(a-\frac{\Delta x}{2}\right)\right\} \\
&=\frac{1}{\Delta x}\left[f(a)+\frac{\Delta x}{2}f'(a)+\frac{(\Delta x)^2}{8}f''(a)+\frac{(\Delta x)^3}{48}f'''(\xi_1)\right. \\
&\qquad\left.-\left\{f(a)-\frac{\Delta x}{2}f'(a)+\frac{(\Delta x)^2}{8}f''(a)-\frac{(\Delta x)^3}{48}f'''(\xi_2)\right\}\right] \\
&=f'(a)+\frac{(\Delta x)^2}{48}(f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)) \\
&=f'(a)+O((\Delta x)^2) \qquad \left(a<\xi_1<a+\frac{\Delta x}{2},\ a-\frac{\Delta x}{2}<\xi_2<a\right)
\end{aligned}
$$

(5.32)

1階差分商: 中心差分商の誤差評価

- 差分商と $f'(a)$ の誤差:
  - 前進/後退差分商: $O(\Delta x)$
  - 中心差分商: $O((\Delta x)^2)$
- 中心差分商が最も速く収束する
  - 表 5-2: $\sin(x)$ の $x = 1$ における中心差分商の値と誤差 (cf. 表 5-1)
  - Δxを1桁ずつ減少→誤差は約2桁ずつ減少

2階差分商: 2階微分を近似する差分商

前進差分を2回適用:

$$f''(a) = \frac{1}{(\Delta x)^2}\{f(a+2\Delta x) - 2f(a+\Delta x) + f(a)\} + O(\Delta x) \qquad (5.33a)$$

後退差分を2回適用:

$$f''(a) = \frac{1}{(\Delta x)^2}\{f(a) - 2f(a-\Delta x) + f(a-2\Delta x)\} + O(\Delta x) \qquad (5.33b)$$

中心差分を2回適用:

$$f''(a) = \frac{1}{(\Delta x)^2}\{f(a+\Delta x) - 2f(a) + f(a-\Delta x)\} + O((\Delta x)^2) \qquad (5.33c)$$

2階差分商: 式 (5.33a) の導出

前進差分を2回適用する → (5.33a)

$$\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{1}{\Delta x}\{f(a+2\Delta x)-f(a+\Delta x)\}-\frac{1}{\Delta x}\{f(a+\Delta x)-f(a)\}\right]$$
$$=\frac{1}{(\Delta x)^2}\{f(a+2\Delta x)-2f(a+\Delta x)+f(a)\} \qquad (5.34)$$

誤差をTaylor の公式で評価し、$\Delta x \to 0$ の極限で誤差が0になるようにする

他の形の差分商:

$$f''(a)=\frac{4}{(\Delta x)^2}\left\{-f(a+\Delta x)+4f\left(a+\frac{\Delta x}{2}\right)-5f(a)+2f\left(a-\frac{\Delta x}{2}\right)\right\}+O(\Delta x)$$

(5.35)

5-3 差分方程式

1階常微分方程式の初期値問題 (5.7) を解く

$f(u, v)$: 関数, $y = y(t)$

$$y' = f(t, y) \tag{5.36a}$$

$$y(0) = a \tag{5.36b}$$

$a \in \mathrm{R}$, $y(t)$ は $t > 0$ の範囲で求める

1階常微分方程式 (5.36a) を初期条件 (5.36b) の下で解く初期値問題

微分方程式と差分方程式

式 (5.36a) の左辺の微分係数を差分商で置き換える

前進差分商を用いると

$$\frac{1}{\Delta x}\{y(t+\Delta t)-y(t)\}=f(t,y(t)) \qquad (5.37)$$

式 (5.36) を満たす $y(t)$ は一般に式 (5.37) を満たすとは限らないので、式 (5.37) の $y(t)$ を $Y(t)$ と書き換えると

微分方程式と差分方程式

$$\frac{1}{\Delta x}\{Y(t+\Delta t) - Y(t)\} = f(t, Y(t)) \qquad (5.38)$$

- 式 (5.38): 差分方程式 (difference equation)
- *y*(*t*): 微分方程式の解（**微分解**と呼ぶ）
- *Y*(*t*): 差分方程式の解（**差分解**と呼ぶ）

格子点

初期条件 (5.36b) の y を Y に置き換える:

$$Y(0) = a \tag{5.39}$$

式 (5.38) を変形すると

$$Y(t + \Delta t) = Y(t) + \Delta \mathrm{t} \cdot f(t, Y(t)) \tag{5.40}$$

これに $t = 0$ を代入すると

$$Y(\Delta t) = Y(0) + \Delta t \cdot f(0, Y(0)) = a + \Delta t \cdot f(0, a) \tag{5.41}$$

格子点

$$Y(\Delta t) = Y(0) + \Delta t \cdot f(0, Y(0)) = a + \Delta t \cdot f(0, a) \quad (5.41)$$

より、$Y(0)$ から $Y(\Delta t)$ が直ちに定まる

同様にして、式 (5.40) を繰り返し用いると

$$Y(2\,\Delta t) = Y(\Delta t) + \Delta t \cdot f(\Delta t, Y(\Delta t)),$$

$$Y(3\,\Delta t) = Y(2\,\Delta t) + \Delta t \cdot f(\Delta t, Y(2\,\Delta t)), \qquad (5.42)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Y((j+1)\,\Delta t) = Y(j\,\Delta t) + \Delta t \cdot f(\Delta t, Y(j\,\Delta t))$$

格子点

- Δt をいったん決めてしまうと、$t = j\,\Delta t$ 以外の時刻の Y の値は式 (5.40) からは求められない
- 差分方程式を解くと、その従属変数はとびとびの時刻で値が定まる
- とびとびの時刻: **格子点** (grid point)
- Y は格子点だけで意味があるので、書き換え:

$$j\,\Delta t \to t_j, \quad Y(j\,\Delta t) \to Y_j$$

格子点

式 (5.36) の常微分方程式の初期値問題が、Y_j に関する漸化式の問題

$$\frac{1}{\Delta t}\{Y_{j+1} - Y_j\} = f(t_j, Y_j) \tag{5.43a}$$

$$Y_0 = a \tag{5.43b}$$

に置き換えられたことになる

微分解と差分解の関係

$$y' = f(t, y) \tag{5.36a}$$

$$\frac{1}{\Delta t}\{Y_{j+1} - Y_j\} = f(t_j, Y_j) \tag{5.43a}$$

は別物だが、Δt が小さければ Y_j が $y(t_j)$ に近い値をとることが期待される

そこで、初期値問題 (5.1) から差分方程式の初期値問題を導いて、もとの問題と比較する

微分解と差分解の関係

式 (5.1) の初期値問題:

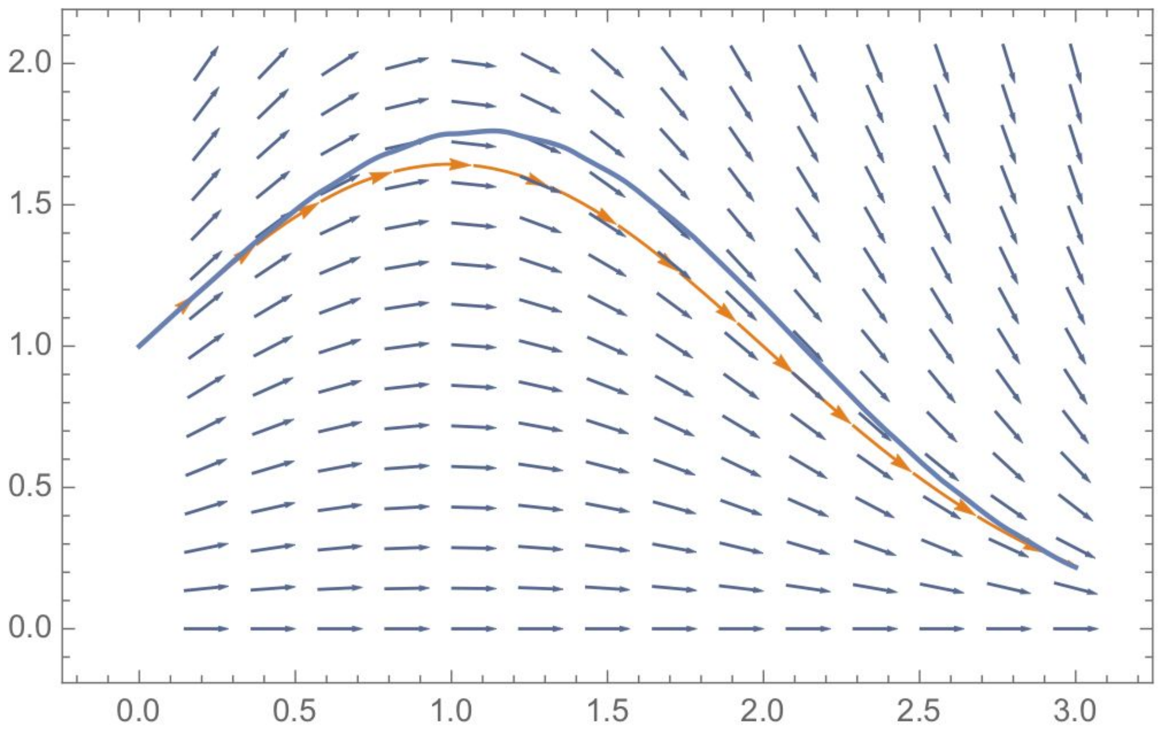
$$y' = (1 - t)\, y \qquad y(0) = 1 \tag{5.44}$$

これに対応する差分方程式の初期値問題:

$$\frac{1}{\Delta t}\{Y_{j+1} - Y_j\} = (1 - t_j) Y_j \qquad Y_0 = 1 \tag{5.45}$$

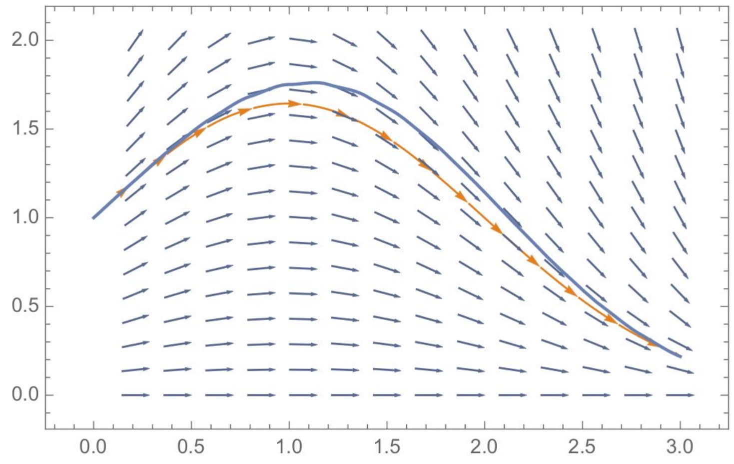
微分解と差分解の関係

微分解（オレンジ）、差分解（青、$\Delta t = 0.2$）



差分法 (difference method)

1. 微分を差分の問題に置き換え
2. 格子点上の値を数値計算し
3. 得られた差分解から微分解を推定する



代表的な差分法

1. オイラー法 (Euler’s method)
2. ホイン法 (Haun’s method)
3. ルンゲ-クッタ法 (Runge-Kutta method)

以下、各方法の差分方程式を挙げる

代表的な差分法

(1) オイラー法 (Euler’s method)

$$\frac{1}{\Delta t}\{Y_{j+1} - Y_j\} = f(t_j, Y_j) \qquad (5.46a)$$

(2) ホイン法 (Haun’s method)

$$k_1 = f(t_j, Y_j), \quad k_2 = f(t_j + \Delta t, Y_j + \Delta t k_1)$$

$$\frac{1}{\Delta t}\{Y_{j+1} - Y_j\} = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \qquad (5.46b)$$

代表的な差分法

(3) ルンゲ-クッタ法 (Runge-Kutta method)

$$k_1 = f(t_j, Y_j), \qquad k_2 = f\left(t_j + \frac{\Delta t}{2}, Y_j + \frac{\Delta t}{2} k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t_j + \frac{\Delta t}{2}, Y_j + \frac{\Delta t}{2} k_2\right), \qquad k_4 = f(t_j + \Delta t, Y_j + \Delta t k_3)$$

$$\frac{1}{\Delta t}\{Y_{j+1} - Y_j\} = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \qquad (5.46c)$$

代表的な差分法の特徴

- どの方法も初期条件として $Y_0 = a$ を用いる
  - オイラー法: 式 (5.43)
  - ホイン法: $k_1 \to k_2$ の順に決定
  - ルンゲ-クッタ法: $k_1 \to k_2 \to k_3 \to k_4$ の順に決定
- 上のすべての方法で、Y_{j+1}の計算に Y_j しか用いていない☞1段階法 (single step method)

代表的な差分法の特徴

- Y_{j+1}の計算に Y_j に加えて Y_{j-1} 等、複数個の前の時刻の値を用いる

☞多段階法 (multistep method)

本授業では扱わない