Chapter 4　確率変数の独立性

4.1　結合確率分布

今までは，確率変数がひとつの場合を議論してきたが，２つ以上の確率変数を扱わなければならないこともある．たとえば，つぎのようなケースはその典型である．

（例 1）筑波大学を訪れていた銭形警部は，キャンパスを散策しているうちに時間の経つのを忘れ，予定していた筑波大学始発で東京駅行の高速バスに乗り損ねてしまった．しかたなく，筑波大学中央発のローカルバスでつくばセンターへ行き，そこからつくばセンター始発の東京駅行の高速バスに乗ることにした．出発時刻がすでに 20 分ほどずれてしまった上に，バスを乗り継がなければならないため，東京駅へ着くのがいつ頃になるのかを推定したいと考えている．ローカルバスの乗車時間を X，それに接続する高速バスの乗車時間を待ち時間も含めて Y としたとき，東京駅への到着時刻の推定に必要な情報は，さまざまな a, b に対する $P\left\{X \le a, Y \le b\right\}$ である．

Def.（joint Cdf）　$F(a,b) \triangleq P\left\{X \le a, Y \le b\right\}$ を X と Y の結合確率分布関数とよぶ．ここで，

$-\infty < a < \infty, -\infty < b < \infty$.

（注）上の定義は，厳密には $F(a,b) \triangleq P\left\{\omega : X(\omega) \le a, Y(\omega) \le b\right\}$ と書かれる．

<u>joint Cdf の性質</u>

（P1）$F(a,b)$ は a,b について単調非減少

（P2）$F(\infty,\infty) = 1$

（P3）$F(a,-\infty) = 0$　　$\forall a$

（P4）$F(-\infty,b) = 0$　　$\forall b$

（P5）$F(a,\infty) = F_X(a)$　　$F_X : X$ の Cdf

（P6）$F(\infty,b) = F_Y(b)$　　$F_Y : Y$ の Cdf

（注）joint Cdf が分かっていれば，特定の確率変数に関する情報を取り出すことができることを示す（P5）と（P6）をよく味わっておくこと．

◆　X, Y ：**離散型確率変数のとき**　◆

Def.（joint pmf）　$p\left(x,y\right) \triangleq P\left\{X = x,\ Y = y\right\}$ を X と Y の結合離散型確率分布とよぶ.

ただし，$p(x,y) \geq 0$　かつ　$\displaystyle\sum_{x,y} p(x,y) = 1$

$p(x,y)$ が与えられると, X の pmf　$p_X(x)$　と Y の pmf　$p_Y(y)$　は, つぎのように求めることができる.

$$p_X(x) = \sum_y p(x,y), \quad p_Y\left(y\right) = \sum_x p(x,y)$$

また，$a \leq b,\ c \leq d$ のとき，

$$P\left\{a \leq X \leq b,\ c \leq Y \leq d\right\} = \sum_{a \leq x \leq b} \sum_{c \leq y \leq d} p\left(x,y\right)$$

問１．$p(x,y)$　の値がつぎのように与えられているとき，$P\{X = 0\}$，$P\{Y = 2\}$，

$P\{0 \leq X \leq 1,\ 0 \leq Y \leq 2\}$　を求めよ.

	$y = -1$	$y = 1$	$y = 2$
$x = 0$	1/4	0	1/6
$x = 1$	0	1/12	1/4
$x = 2$	1/12	1/12	1/12

◆　X, Y ：**連続型確率変数のとき**　◆

Def.（joint pdf）　任意の a, b, c, d　（ただし，$a \leq b, c \leq d$）について次式を満たす非負の f が存在するとき，f を Xと Y の結合確率密度関数とよぶ.

$$P\{a \leq X \leq b,\ c \leq Y \leq d\} = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

問 2.　$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy\,dx$　を示せ.

問 3.　$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$　を示せ.

問 4.　$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\ dx\,dy$，　$f_Y\left(y\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\ dx$　を示せ.

Thm. 1　$g(x,y)$ を x, y についての実数値連続関数とするとき，

$$E(g(X,Y)) = \begin{cases} \displaystyle\sum_y \sum_x g(x,y)\, p(x,y) & \Big(X,Y : discrete\Big) \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\, f(x,y)\ dx\, dy & \Big(X,Y : continuous\Big) \end{cases}$$

問 5.　$E\left(aX + bY\right) = aE(X) + bE(Y)$ を証明せよ．この性質は E の線形性とよばれるが，一般には次式のように表すことができる．

$$E\left(a_1 X_1 + \ldots + a_n X_n\right) = a_1 E(X_1) + \ldots + a_n E(X_n)$$

<u>二項型確率変数の期待値</u>

$P\{H\} = p, P\{T\} = 1 - p$ のコインを n 回投げるとき，H の回数 X の期待値 $E(X)$ を求めよう．

$$X_i \triangleq \begin{cases} 1 & i\text{回目は}H \\ 0 & i\text{回目は}T \end{cases}$$

とすると，$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ と書ける（これがポイント）．よって，

$$E(X) = E\left(\sum X_i\right) = \sum E(X_i) = \sum p = np$$

（注）これは，問 5 の結果を応用したものである．ここで示した方法を，3.1 問 4 で学んだ方法と比較してみると，問 5 の威力が分かるであろう．

問 6. 正しく作られたコインを 3 回投げる．

（1） $X \triangleq \begin{cases} 0 & 第 1 投で H が出る \\ 1 & 第 1 投で T が出る \end{cases}$ とするとき，X の pmf $p_X(x)$ を求めよ．

（2） 3 回投げたとき，H が出た回数を Y とする．Y の pmf $p_Y(y)$ を求めよ．

（3） X と Y の joint pmf $p(x,y)$ を求めよ．

問 7. X と Y の joint pmf p が次式で与えられているとする．

$$p(x,\, y) = \begin{cases} c\,(2x+y)\,, & x = 0, 1\ ;\, y = 0, 1, 2 \\ 0, & \text{それ以外の時} \end{cases}$$

（1） 定数 c の値を求めよ．

（2） $P\left\{X \geq 0,\ Y \leq 1\right\}$ を求めよ．

4.2　確率変数の独立性

Def. 1　X と Y は独立　$\Leftrightarrow$　$P\{X \le a,\, Y \le b\} = P\{X \le a\}\ P\{Y \le b\} \quad \forall a,\, b \in R^1$

$$\Leftrightarrow \quad F(a,\, b) = F_X(a)\ F_Y(b) \qquad \forall a,\, b \in R^1$$

$$\Leftrightarrow \quad P\{X \le a \,\big|\, Y \le b\} = P\{X \le a\} \qquad \forall a,\, b \in R^1$$

問 1.　X と Y が独立であるとき，次式が成立することを証明せよ．

$$P\{a < X \le b,\, c < Y \le d\} = P\{a < X \le b\}\ P\{c < Y \le d\}$$

問 2.　$X,\, Y$ が離散型確率変数であるとき，つぎのことを示せ．

X と Y は独立　$\Leftrightarrow$　$p(a,\, b) = p_X(a)\ p_Y(b) \qquad \forall a,\, b \in R^1$

問 3.　$X,\, Y$ が連続型確率変数であるとき，つぎのことを示せ．

X と Y は独立　$\Leftrightarrow$　$f(a,\, b) = f_X(a)\ f_Y(b) \qquad \forall a,\, b \in R^1$

Thm. 2　X と Y をたがいに独立な確率変数，g と h を実数値連続関数とするとき，

$$E[g(X)\ h(Y)] = E[g(X)]\ E[h(Y)]$$

問 4．上の Thm. 2 を証明せよ．

問 5．X と Y が独立ならば，$E(XY) = E(X)\ E(Y)$ が成立することを示せ．

確率変数の独立性は，さまざまな理論において重要な役割を果たしている．ひとつの例は，システム信頼性理論に見ることができる．

（例１）　n 個の装置からなるシステムを考えてみよう．システムが正常に作動するのは n 個の装置がすべて正常である場合に限られるとき，このシステムを直列系（series system）という．

n 個の装置のそれぞれの状態を表す確率変数をつぎのように定めよう．

$$X_i \triangleq \begin{cases} 1 & \text{装置}\ i\ \text{は正常} \\ 0 & \text{装置}\ i\ \text{は故障} \end{cases}$$

同様に，システムの状態を表す確率変数をつぎのように定めよう．

$$X \triangleq \begin{cases} 1 & \text{システムは正常} \\ 0 & \text{システムは故障} \end{cases}$$

3 個の装置からなる直列系を考えてみよう．$X = X_1 X_2 X_3$ が成立することから，各装置の故障発生がたがいに独立であると考えられる場合は，システムの信頼度 $p \triangleq P\{X = 1\}$ は各装置の信頼度 $p_i \triangleq P\{X_i = 1\}$ によってつぎのように表現することができる．

$$p = P\{X=1\} = E(X) = E(X_1X_2X_3) = E(X_1)E(X_2)E(X_3) = p_1\,p_2\,p_3$$

（例２）n 個の装置からなるシステムがある．n 個の装置のうち少なくとも 1 個が正常であればシステムは正常に作動するという場合，このシステムは並列系（parallel system）とよばれる．

3 個の装置からなる並列系があるとき，システムの状態 X は各装置の状態 X_i によってどのように表されるかを考えてみよう．ブール論理和の記号を $\vee$ と書くとき，$X = X_1 \vee X_2 \vee X_3$ が成立するが，これを通常の算術演算を用いる方式で記述すると，つぎのようになる．

$$\begin{aligned} X &= X_1 \vee X_2 \vee X_3 \\ &= 1-(1-X_1)(1-X_2)(1-X_3) \\ &= X_1 + X_2 + X_3 - X_1X_2 - X_2X_3 - X_3X_1 + X_1X_2X_3 \end{aligned}$$

したがって，各装置の故障が独立であるという仮定のもとでは，システムの信頼度は次式で与えられる．

$$p = p_1 + p_2 + p_3 - p_1p_2 - p_2p_3 - p_3p_1 + p_1p_2p_3$$

問 6．上の式が成立することを確かめよ．

問 7．信頼度が 0.9 の装置 3 台からなる直列系の信頼度を求めよ．

問 8．信頼度が 0.9 の装置 3 台からなる並列系の信頼度を求めよ．

このように，並列系の信頼度は，直列系の信頼度に比べて大きい．ただし，それは各装置の故障が独立であるとの仮定があってはじめていえることである．

各装置の故障が独立でない場合の典型は，「共通原因故障」が発生するケース，すなわち，一つの原因（共通原因）によって複数の装置が一挙に故障するケースである．たとえば，つぎのような例がある．

（1） 日本航空 123 便の御巣鷹山での墜落事故：「隔壁破壊」によって油圧 4 系統がすべて破損し，機体は制御不能になった．

（2） 飛行中のボーイング 767 の全エンジンが停止：燃料の残存量を計算するコンピュータが故障している状態のまま目的空港へ向けて出発しようとした．燃料補給の際，ケロシンの比重を誤ったため，補給すべき量の約半分しか給油しなかった．

（3） 飛行中のボーイング 747-400 の全エンジンが停止：理由は，噴火した火山が噴き上げた火山灰のなかに突入したためである．

（4） 飛行中のロッキード・トライスター L-1011 の全エンジンが停止：飛行前夜のエンジン保守作業において作業員が各エンジンの部品交換を行った際，O（オー）リングの取り付けを忘れたため，飛行中にエンジンオイルが漏れ，エンジンが焼きついた，あるいは焼きつき寸前となった．

（5） 首都圏の大停電：クレーン船がアームを上げたままの状態で川を航行中に，川をまたぐ形で張られていた送電線にアームを引っかけた．そのため，本線とバックアップ用の両系統が切断された．

Def. 2 $Cov(X, Y) \triangleq E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$ を，X と Y の共分散（covariance）とよぶ．

<u>共分散の性質</u>

（P1）$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)\ E(Y)$

（P2）X と Y が独立ならば，$Cov(X, Y) = 0$

逆は成立しない．すなわち，$Cov(X, Y) = 0$ であっても，X と Y が独立とは限らない．

（例） $p(1,\,0) = p(0,\,1) = p(-1,\,0) = p(0,\,-1) = 1\,/\,4$ を満たす X と Y を考えよう．

このとき， $E(X) = 0,\; E(Y) = 0,\; E(XY) = 0$　ゆえ $Cov(X,\,Y) = 0$ であるが，

$P\;\{X = 0\}\;P\;\{Y = 0\} = (1\,/\,2)\cdot(1\,/\,2) \neq P\;\{X = 0,\,Y = 0\} = 0$ である．

すなわち， X と Y は独立ではない．

（P3） $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2\;Cov(X,\,Y)$

（P4） X と Y が独立　$\Rightarrow$　$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$

<u>独立な確率変数 $X,\,Y$ の和 $X + Y$ の分布</u>

$X,\,Y$ ：continuous かつ独立とするとき， $f(x,\,y) = f_X(x)\;f_Y(y)$

Thm. 3　独立な確率変数 $X,\,Y$ の和 $X + Y$ の Cdf を F_{X+Y} と書くとき， F_{X+Y} は次式で与えられる．

$$F_{X+Y}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(a - y)\;f_Y(y)\;dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\;F_Y(a - x)\;dx$$

（証明）
$$\begin{aligned}F_{X+Y}(a) &= \int\int_{x+y\le a} f(x,\,y)\;dxdy\\ &= \int\int_{x+y\le a} f_X(x)\;f_Y(y)\;dxdy\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{a-y} f_X(x)\;dx\right)f_Y(y)\;dy\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F_X(a - y)\;f_Y(y)\;dy\end{aligned}$$

（注） $\int f(x)\;g(a - x)\;dx$ の型の積分を convolution（合成積）とよぶ．

問 9.　$F_{X+Y}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\ F_Y(a-x)\ dx$ を証明せよ.

Thm. 4　独立な確率変数 X, Y の和 $X+Y$ の $\mathrm{pdf}\big(f_{X+Y}\big)$ は次式で与えられる.

$$f_{X+Y}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(a-y)\ f_Y(y)\ dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\ f_Y(a-x)\ dx$$

（証明）$f_{X+Y}(a) = \dfrac{d}{da}\ F_{X+Y}(a)$ より従う.

問 10.　X と Y は独立であり，ともにパラメータ λ の指数分布に従う.　f_{X+Y} を求めよ.

問 11. X と Y は独立であり，ともに（0, 1）上の一様分布に従う．f_{X+Y} を求めよ．

独立な確率変数 X, Y がともに離散型のとき，Thm. 4 相当の性質はつぎのように表現される．

$$P\{X+Y=n\}=\sum_{k=0}^{n} P\{X=k,\, Y=n-k\}=\sum_{k=0}^{n} P\{X=k\}\; P\{Y=n-k\}$$

問 12. X と Y は独立であり，各々パラメータ λ_1, λ_2 のポアソン分布に従う．p_{X+Y} を求め，和 $X+Y$ もポアソン型確率変数である（ポアソン分布の再生性という）ことを確かめよ．

Def. 3　n 個の $X_1, \ldots, X_n$ が独立

$$\Leftrightarrow \quad P\left\{X_1 \le a_1, \ldots, X_n \le a_n\right\} = P\left\{X_1 \le a_1\right\} \cdots P\left\{X_n \le a_n\right\} \quad \forall a_i \in R^1$$

（注）「1.5 独立事象」における n 個の事象の独立性の定義と比較してみること．

4.3　モーメント母関数

Def.　確率変数 X について，実数 t の関数 $\phi(t) \triangleq E(e^{tX})$ を考える．　$t=0$ の近傍で $\phi(t)$ が存在するとき，$\phi(t)$ を X のモーメント母関数（moment generating function：mgf）とよぶ.

$$\phi(t) = \begin{cases} \sum_x e^{tx} p(x) & \left(X : discrete\right) \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\, dx & \left(X : continuous\right) \end{cases}$$

（注）mgf は常に存在するとは限らないが，計算面で有用である．一方，t を純虚数 it で置き換えた $E(e^{itX})$ は特性関数とよばれ，理論面で活躍する．なお，特性関数は常に存在する．

<u>mgf $\phi\,(t)$ の性質</u>

（P1）$\phi^{(n)}(0) = E(X^n)$　　$n \geq 1$.　　　（注）　$\phi^{(n)}(0) = \left.\dfrac{d^n \phi\left(t\right)}{dt^n}\right|_{t=0}$

（例 1）パラメータ $(n,\ p)$ の二項分布に従う確率変数

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{tk} \binom{n}{k} p^k \left(1-p\right)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(pe^t\right)^k (1-p)^{n-k} = \left(pe^t + 1 - p\right)^n$$

$$\phi'(t) = n\left(pe^t + 1 - p\right)^{n-1} pe^t$$

$$\phi''(t) = n\,(n-1)\left(pe^t + 1 - p\right)^{n-2}\left(pe^t\right)^2 + n\left(pe^t + 1 - p\right)^{n-1} pe^t$$

よって，

$$E(X) = \phi'(0) = np$$

$$E(X^2) = \phi''(0) = n\left(n-1\right) p^2 + np$$

$$Var(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = np\,(1-p)$$

（例２）正規分布 $N\left(\mu, \sigma^2\right)$ に従う確率変数

$$\phi(t) = E(e^{tx}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[tx - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right] dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2 - 2\sigma^2 tx}{2\sigma^2} \right] dx$$

[　] の中をつぎのように変形する．

$$[\quad] = -\frac{1}{2\sigma^2}\left[x^2 - 2(\mu + \sigma^2 t)x + \mu^2 \right]$$

$$= -\frac{1}{2\sigma^2}\left[x^2 - 2(\mu + \sigma^2 t)x + (\mu + \sigma^2 t)^2 - (\mu + \sigma^2 t)^2 + \mu^2 \right]$$

$$= -\frac{1}{2\sigma^2}\left[x - (\mu + \sigma^2 t) \right]^2 + \mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}$$

よって，

$$\phi(t) = \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2} \right) \bullet \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ -\frac{\left[x - (\mu + \sigma^2 t) \right]^2}{2\sigma^2} \right\} dx}_{N(\mu + \sigma^2 t\ ,\ \sigma^2)\text{ の } pdf \text{ の定義域全域にわたる積分ゆえ，1}} = \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2} \right)$$

$$\phi'(t) = (\mu + t\sigma^2) \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2} \right)$$

$$\phi''(t) = (\mu + t\sigma^2)^2 \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2} \right) + \sigma^2 \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2} \right)$$

であるから，

$$E(X) = \phi'(0) = \mu, \quad E(X^2) = \phi''(0) = \mu^2 + \sigma^2, \qquad Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sigma^2$$

問 1．パラメータ λ のポアソン分布に従う確率変数 X の mgf $\phi(t)$，$E(X), Var(X)$ を求めよ．

問 2．パラメータ λ の指数分布に従う確率変数 X の mgf $\phi(t)$，$E(X), Var(X)$ を求めよ．

（P2）mgf $\phi(t)$ は Cdf(F) から一意に定まる．逆に，Cdf(F) は mgf $\phi(t)$ から一意に定まる．

（注）（P2）の後半を示すのは難しい．

(P3) 独立な X, Y の mgf を $\phi_X(t)$，$\phi_Y(t)$ とするとき，$X+Y$ の mgf $\phi_{X+Y}(t)$ は次式で与えられる．

$$\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t)\ \phi_Y(t)$$

上の（P2），（P3）は，以下の問にあるように，「分布の再生性」を調べる際に重要な役割を演じる．

問 3.　X と Y が独立であり，各々パラメータ $(m,\ p)$，$(n,\ p)$ の二項分布に従う．このとき，$X+Y$ は

パラメータ $(m+n,\ p)$ の二項分布に従うことを示せ（二項分布の再生性という）．

（注）$X_i\ (i=1,\ \ldots,\ n)$ がたがいに独立で，各々パラメータ $(k_i,\ p)$ の二項分布に従うとき，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ は

パラメータ $\left(\displaystyle\sum^{n} k_i,\ p\right)$ の二項分布に従う（数学的帰納法）．

問 4.　X と Y が独立であり，各々パラメータ $\lambda_1,\ \lambda_2$ のポアソン分布に従うとき，$X+Y$ はパラメータ

$\lambda_1+\lambda_2$ のポアソン分布に従うことを示せ（ポアソン分布の再生性という）．

問 5.　X と Y が独立であり，各々 $N\left(\mu_1,\ \sigma_1^2\right)$, $N\left(\mu_2,\ \sigma_2^2\right)$ に従うとき，$X+Y$ は

$N\left(\mu_1+\mu_2,\ \sigma_1^2+\sigma_2^2\right)$ の正規分布に従うことを示せ（正規分布の再生性という）．

4.4 特性関数

Def. 確率変数 X に対して，t を実数とする関数 $c(t) \triangleq E(e^{itX})$ を考える．このとき，$c(t)$ を X の特性関数（characteristic function：ch.f と略記）とよぶ.

（注）ch.f は常に存在する．このことは $E(e^{itX}) = E(\cos\, tX) + i\; E(\sin\, tX)$ において，つぎの 2 つの性質が成立することによる．

（a） $\cos\, tX(\omega)$， $\sin\, tX(\omega)$ は有界な確率変数.

（b） $Z\,(\omega)$ が有界な確率変数ならば，$E(Z) < \infty$

（$\because$）$\left|Z\,(\omega)\right| \le a < \infty\ (\forall \omega \in \Omega)$ のとき，$\left|E(Z)\right| \le E(\left|Z\right|) \le E(a) = a < \infty$.

例 1．パラメータ $(n,\, p)$ の二項型確率変数：　$c(t) = \left(pe^{it} + 1 - p\right)^n$

例 2．パラメータ λ のポアソン型確率変数：　$c(t) = \exp\left[\lambda\left(e^{it} - 1\right)\right]$

例 3．パラメータ λ の指数型確率変数：　$c(t) = \lambda / \left(\lambda - it\right)$

例 4．$\mathcal{N}\left(\mu,\, \sigma^2\right)$ に従う正規確率変数：　$c(t) = \exp\left[i\mu t - \dfrac{1}{2}\,\sigma^2 t^2\right]$

結果的に，これらは対応する mgf における t を it で置き換えたものになっている．

<u>**ch.f $c\,(t)$ の性質**</u>

（P1） $E(X^n) = i^{-n} c^{(n)}\,(0)\ (n \ge 1)$

（P2） $c(t)$ は F から一意的に決定される．逆に，F は $c(t)$ から一意的に定まる．

（P3）独立な X, Y の ch.f を $c_X(t)$, $c_Y(t)$ とするとき, $X + Y$ の ch.f $c_{X+Y}(t)$ は次式で与えられる．

$$c_{X+Y}(t) = c_X(t)\ c_Y(t)$$

（P4）ある正整数 n に対して $E(\left|X\right|^n) < \infty$ ならば，　$t = 0$ の近傍において，

$$c(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(it\right)^k}{k\,!}\ E(X^k) + o\left(t^n\right)$$