Chapter 3　期待値

3.1　期待値

Def. 1　X を $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ 上で定義された離散型確率変数とするとき，

$$E(X) = \sum_i X(\omega_i) P\{\omega_i\}$$

を X の期待値（expected value）とよぶ．ただし，$\sum_i |X(\omega_i)| P\{\omega_i\} < \infty$ を仮定する．

（例）つぎのようなくじを考える．ここで，$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_7\}$．

くじ	ω_i	1	2	3	4	5	6	7
賞金(円)	$X(\omega_i)$	800	900	1000	1200	800	900	800
確率	$P\{\omega_i\}$	$\frac{5}{100}$	$\frac{10}{100}$	$\frac{10}{100}$	$\frac{10}{100}$	$\frac{15}{100}$	$\frac{20}{100}$	$\frac{30}{100}$

このくじを 1 回引いて得られる賞金額 X の期待値は，つぎのように計算することができる．

$$\begin{aligned} E(X) &= 800 \cdot \frac{5}{100} + 900 \cdot \frac{10}{100} + 1000 \cdot \frac{10}{100} + 1200 \cdot \frac{10}{100} \\ &\quad + 800 \cdot \frac{15}{100} + 900 \cdot \frac{20}{100} + 800 \cdot \frac{30}{100} \ = \ 890 \ （円） \end{aligned}$$

ここで，上の式がつぎのように書き換えられることに注目してみよう．

$$E(X) = 800\left(\frac{5}{100} + \frac{15}{100} + \frac{30}{100}\right) + 900\left(\frac{10}{100} + \frac{20}{100}\right) + 1000 \cdot \frac{10}{100} + 1200 \cdot \frac{10}{100}$$

X のとりうる値 x_n（現在の例では，$x_1 = 800, x_2 = 900, x_3 = 1000, x_4 = 1200$）に対し，$X$ が値 x_n をとる確率を $P\{\omega : X(\omega) = x_n\}$，あるいは簡略的に $P\{X = x_n\}$ と書くと，つぎの各式が得られる．

$$P\{\omega : X(\omega) = 800\} = P\{X = 800\} = P\{\omega_1\} + P\{\omega_5\} + P\{\omega_7\} = \frac{5}{100} + \frac{15}{100} + \frac{30}{100}$$

$$P\{\omega : X(\omega) = 900\} = P\{X = 900\} = P\{\omega_2\} + P\{\omega_6\} = \frac{10}{100} + \frac{20}{100}$$

$$P\{\omega : X(\omega) = 1000\} = P\{X = 1000\} = P\{\omega_3\} = \frac{10}{100}$$

$$P\{\omega : X(\omega) = 1200\} = P\{X = 1200\} = P\{\omega_4\} = \frac{10}{100}$$

このことから，賞金額の期待値は，つぎのように計算できることがわかる．

$$E(X) = \sum_{n=1}^{4} x_n P\{\omega : X(\omega) = x_n\} = \sum_{n=1}^{4} x_n P\{X = x_n\}$$

Thm. 1　X が離散型確率変数であるとき，X の期待値 $E(X)$ は，次式で与えられる．

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n P\{X = x_n\}$$

問 1．Thm. 1 を証明せよ．

問 2. X を正しく作られたサイコロの目とするとき，$E(X)$ を求めよ．

問 3. つぎのようなベルヌーイ型確率変数 X について，$E(X)$ を求めよ．

$$X = \begin{cases} 0 & \text{w.p.} \quad (1-p) \\ 1 & \text{w.p.} \quad p \end{cases}$$

“w.p.”は“with probability”の略記.

問 4. つぎのような二項型確率変数 X について，$E(X)$ を求めよ．

$$P\{X = i\} = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \qquad (i = 0,1,\ldots,n)$$

問 5. つぎのような幾何型確率変数 X について，$E(X)$ を求めよ．

$$P\{X = n\} = (1-p)^{n-1}\, p$$

問 6．つぎのようなポアソン型確率変数 X について，$E(X)$ を求めよ．

$$P\{X=i\}=e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}\qquad \left(\lambda>0,\, i=0,1,2,\ldots\right)$$

Def. 2（連続型確率変数 X の期待値）

$$EX=\int_{\Omega}X(\omega)\,dP$$

ただし，この積分はルベーグ・スティルチェス積分とよばれるものであり，本講義の範囲を超える．

離散型確率変数の場合から類推できるように，連続型確率変数について，つぎの Thm. 2 が成立する（ただし，証明は難しい）．

Thm. 2　X が連続型確率変数であるとき，X の期待値 $E(X)$ は，次式で与えられる．

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\,dx\qquad f(\cdot)\text{ は pdf}$$

以降では，Thm. 2 に従って $E(X)$ を計算してよい．

問 7．(a,b) 上の一様分布に従う X について，$E(X)$ を求めよ．

問 8．パラメータ λ の指数分布に従う X について，$E(X)$ を求めよ．

問 9．pdf が次式で与えられる X について，$E(X)$ を求めよ．

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 < x < 2 \end{cases}$$

3.2　確率変数の関数の期待値

x に関する実数値連続関数 $g(x)$ が与えられているとする． $X = X(\omega)$ が確率変数ならば，$g(X) = g(X(\omega))$ も確率変数である．

Eg(X)の求め方（その 1）

Thm. 1 あるいは Thm. 2 にしたがうなら，$Y = g(X)$ とし，確率変数 Y の分布を用いて，つぎのように計算する必要がある．

$$E(g(X)) = E(Y) = \begin{cases} \sum y\, p_Y(y) & (X : discrete) \\ \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y)\, dy & (X : continuous) \end{cases}$$

（p_Y，f_Y は，各々 Y の pmf，pdf）

問 1．X は離散型確率変数であり，$p(0) = 0.2,\ p(1) = 0.5,\ p(2) = 0.3$ とするとき，$E(X^2)$ を求めよ．

（$Y = X^2$ の pmf $p_Y(\cdot)$ を求めてみよ）

問 2．X が区間 $(0, 1)$ 上の一様分布に従う確率変数であるとき，$E(X^3)$ を求めよ．

上述の方法は，関数 g が変われば $Y=g(X)$ の pmf，pdf を再計算する必要があるため，決して便利なものとはいえない．そこで，X 自身の pmf，pdf を用いるつぎの方法が重要となる．

$E(g(X))$ の求め方（その 2）

Thm. 3（Law of the unconscious statistician）

$$E(g(X)) = \begin{cases} \sum g(x)\,p(x) & (X : discrete) \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,f(x)\,dx & (X : continuous) \end{cases}$$

（p，f は，各々 X の pmf，pdf）

（証明）X が離散型確率変数のときについてのみ証明する．

$\{x : p(x) > 0\} = \{x_1, x_2, \ldots\}$ とする．ここで，$i \neq j$ のとき，$x_i \neq x_j$ とする．

$A_n = \{\omega : X(\omega) = x_n\}$ とすると，$A_n \cap A_m = \phi$（$n \neq m$）および $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$ が成立する．

よって，

$$E(g(X)) = \sum_{\omega \in \Omega} g(X(\omega))P\{\omega\}$$

（注）$E(Y)$の定義（3.1参照）

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{\omega \in A_n} g(X(\omega))P\{\omega\}\right)$$

（$X(\omega) = x_n$ を満たす ω を一纏めにする並び替え）

$$= \sum_{n=1}^{\infty} g(x_n)\sum_{\omega \in A_n} P\{\omega\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} g(x_n)P\{A_n\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} g(x_n)P\{\omega : X(\omega) = x_n\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} g(x_n)p(x_n)$$

問 3．上の Thm. 3 を用いて，問 1，問 2 を解いてみよ．

（問１）

（問 2）

問 4． $E(\cdot)$ は線形作用素であること（a,b を定数とするとき，$E(aX+b)=aE(X)+b$ が成立すること）を証明せよ．（注） X が離散型，X が連続型の場合に分けて証明せよ．

問 5. a,b が定数のとき，$E(ag(X)+bh(X))=aE(g(X))+bE(h(X))$ が成立することを証明せよ．

Def. $E(X^n)$ $(n \geq 1)$ を，確率変数 X の n 次モーメントとよぶ.

Def. $\mathrm{Var}(X) = E\big(X - E(X)\big)^2$ を，確率変数 X の分散（variance）とよぶ.

<u>**分散の性質**</u>

（P1） $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$

（P2） $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\mathrm{Var}(X)$ （注） $\mathrm{Var}(\cdot)$ は線形作用素にあらず

問 6.（P1），（P2）を証明せよ.

（P1）

（P2）

問 7. X を正しく作られたサイコロの目とするとき，$\mathrm{Var}(X)$ を求めよ.

問 8. $f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ のとき，$\mathrm{Var}(X)$ を求めよ.

問 9.　$N\left(\mu, \sigma^2\right)$に従う確率変数 X について，$E(X)$ を求めよ．

正規分布は，記号的に $N\left(\mu, \sigma^2\right)$ と表現されるが，μ の意味は，問 9 で見たとおりである．一方，σ^2 は，どのような意味を持っているのだろうか．

$N\left(\mu, \sigma^2\right)$に従う確率変数 X について，$\mathrm{Var}(X)$を計算してみよう．

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx \qquad \text{（ここで，} y = \frac{x-\mu}{\sigma} \text{ なる変数変換を行う）}$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

ところで，　$I(a) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$　であるから，次式を得る．

$$\frac{dI(a)}{da} = -\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2}dx = -\frac{1}{2}\sqrt{\pi}a^{-\frac{3}{2}}$$

ゆえに，

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{2\pi}$$

よって，

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2.$$

問 10. 正しく作られたサイコロを 3 個投げるとき，H の枚数を X とする．

（1） pmf $p(x)$ を求めよ．

（2） $E(X)$ を求めよ．

（3） $\mathrm{Var}(X)$ を求めよ．

問 11. X は，区間（0, 1）上の一様分布に従う確率変数である．

（1） $Y = e^X$ の pdf $f_Y(y)$ を求めよ．（まず，Cdf $F_Y(y)$ を求め，y で微分せよ）

（2） $E(e^X)$ を求めよ．（上の（1）で求められた $f_Y(y)$ を用いる方法と，X 自身の pdf を用いる方法で求めよ）